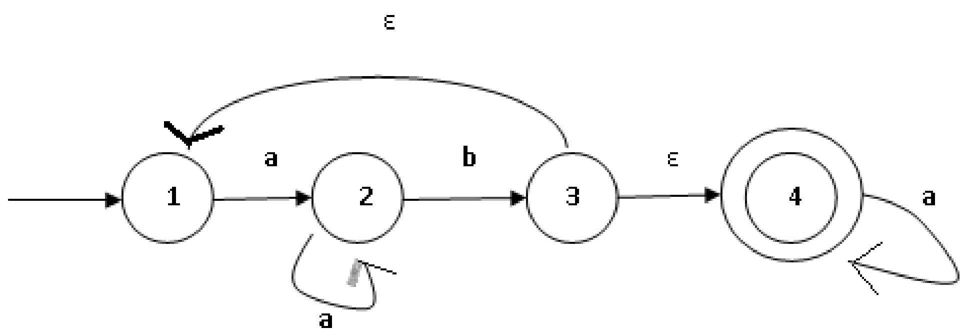
Institut des Sciences Appliquées et Économiques ISAE-Cnam Liban *Centre du Liban Associé au CNAM de Paris*	Date: Juin Final 2h 2016-2017	Sujet coordonné par: J.Saab Proposé pour les centres d'enseignement de: Beyrouth-Baalbek-Tripoli-Bickfaya Nahr Ibrahim Langue de l'éxamen: Français

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Final
Automates, Codes, Graphes- MVA004

1. (20points) On se donne sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, l'automate fini non déterministe $(AFN - \varepsilon)$ A , défini par le diagramme:



On note L le langage reconnu par l'automate A.

(a) ($3pts$)Donner la liste des mots de L de longueur inférieure ou égale à 3.

(b) ($5pts$)Déterminiser A. On va noter par A_d l'automate déterministe qui est équivalent à A.

(c) (système:$2pts$; solution: $4pts$) Ecrire le système de départ pour A_d et le résoudre. En déduire une expression régulière pour le langage L.

(d) ($6pts$)Vérifier que A_d est un automate minimal.

---

2. (30points) On code les blocs de trois bits de la façon suivante: le bloc $b_1b_2b_3$ est codé $b_1b_2b_3c_1c_2c_3$ où $c_1 = b_2 \oplus b_3,\ c_2 = b_3 \oplus b_1$ et $c_3 = b_1 \oplus b_2$.

(a) ($3pts + 4pts$)Montrer que ce code est linéaire. Ecrire sa matrice génératrice G.

(b) ($4pts + 1pt + 2pts + 1pt$)Ecrire la liste des mots de code. Déterminer la distance minimale d. Ce code est-il parfait? Est-il de Hamming? Expliquer.

(c) ($3pts + 3pts$)On reçoit les messages suivants: $m_1 = 101110$ et $m_2 = 111111$. Donner, sous forme de table, les ensembles de vecteurs d'erreur $\Gamma(m_1)$ et $\Gamma(m_2)$.

(d) ($3pts + 3pts$)En déduire les corrections possibles de m_1 et m_2.

(e) ($3pts$)Le canal binaire est supposé sysmétrique, on note p la probabilité d'erreur d'un bit. Quelle est la probabilité de se tromper en corrigeant m_1.

---

3. (30points) On considère un code polynômial $(8, 5)$ généré par le polynôme $G(X) = X^3 + X + 1$. Un mot à coder $a_1a_2a_3a_4a_5$ peut se présenter sous la forme $P(X) = a_1X^4 \oplus a_2X^3 \oplus \cdots \oplus a_5X^0$. Le codage systématique défini par $G(X)$ est donné par l'application

$$\varphi : \quad B^5 \quad \longrightarrow \quad B^8$$

$\varphi(a_1a_2a_3a_4a_5\ ) = a_1a_2a_3a_4a_5\ b_1b_2b_3$ avec $R(X) = b_1X^2 \oplus b_2X \oplus b_3$ est le reste de la division de $X^3.P(X)$ par $G(X)$.

(a) (6pts) Exprimer les bits de contrôle b_i en fonction des a_j.

(b) On va supposer que $b_1 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4$; $b_2 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_5$; $b_3 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_5$.

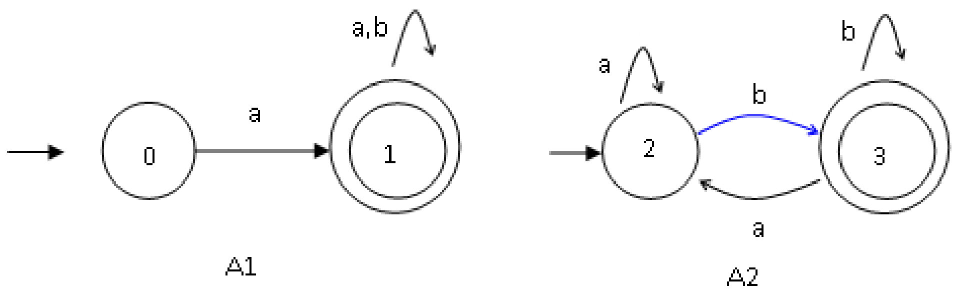
1. (6pts)Donner la matrice génératrice G de φ.
2. (6pts)Transformer grâce à des opérations élémentaires, la matrice G en la matrice associée à $G(X)$ dont les lignes l_i sont les coefficients de $X^{k-i}.G(X)$.

(c) (6pts)Ce code est-il cyclique? Justifier.

(d) (6pts)Donner le syndrome de $m = 01101101$ en utilisant la division par $G(X)$. Le mot m est-il un mot de code?

---

4. (20pts) On se donne les deux automates A_1 et A_2 représentés par les diagrammes



(a) (8pts)Donner le diagramme de l'automate déterministe A qui reconnait le langage $L = L(A_1) + L(A_2)$.

(b) (4pts + 4pts)En shématisant les états, vérifier si les mots $m_1 = ba^3b^2a^2$ et $m_2 = bab^2a^2b^3$ sont reconnus par A.

(c) (4pts)Construire un automate qui reconnait $L = a^+(ba)^+b^+$.
