

# Généralités sur les graphes

Christophe ROSSIGNOL\*

Année scolaire 2008/2009

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Notion de graphe</b>	<b>3</b>
1.1	Un peu de vocabulaire . . . . .	3
1.2	Ordre d'un graphe, degré des sommets . . . . .	3
1.3	Graphe simple, graphe complet . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Matrice associée à un graphe</b>	<b>6</b>
2.1	Définitions . . . . .	6
2.2	Chaînes d'un graphe . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Théorème d'Euler</b>	<b>8</b>
3.1	Graphe connexe . . . . .	8
3.2	Chaîne eulérienne, cycle eulérien . . . . .	9
3.3	Théorème d'EULER . . . . .	10
3.4	Algorithme d'EULER . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Coloriage des sommets d'un graphe</b>	<b>11</b>
4.1	Notion de sous-graphe . . . . .	12
4.2	Nombre chromatique . . . . .	12
4.3	Algorithme de WELSH-POWELL . . . . .	12
4.4	Cas d'un graphe complet . . . . .	13

---

\*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

## Table des figures

1	Un graphe contenant une boucle . . . . .	3
2	Un exemple de graphe simple . . . . .	4
3	Un autre exemple de graphe simple . . . . .	4
4	Un exemple de graphe non simple . . . . .	5
5	Un graphe orienté simple . . . . .	5
6	Un graphe orienté non simple . . . . .	5
7	Graphe orienté contenant une boucle . . . . .	5
8	Le graphe complet d'ordre 3 . . . . .	5
9	Le graphe complet d'ordre 4 . . . . .	5
10	Le graphe complet d'ordre 5 . . . . .	5
11	Matrice associée à un graphe non orienté . . . . .	6
12	Matrice associée à un graphe orienté . . . . .	7
13	Un graphe connexe . . . . .	8
14	Un graphe non connexe . . . . .	8
15	Graphe contenant une chaîne eulérienne . . . . .	9
16	Graphe contenant un cycle eulérien . . . . .	10
17	Détermination pratique d'une chaîne eulérienne (1) . . . . .	10
18	Détermination pratique d'une chaîne eulérienne (2) . . . . .	11
19	Un sous-graphe du graphe complet d'ordre 4 . . . . .	12
20	Pas un sous-graphe du graphe complet d'ordre 4 . . . . .	12
21	Coloriage d'un graphe . . . . .	13

---

En préliminaire :

**Exercice :** A et B<sup>1</sup> page 208 [Déclic]

**Activité 1 (Vocabulaire les graphes) :** Des schémas...

## 1 Notion de graphe

### 1.1 Un peu de vocabulaire

- Un **graphe** est un schéma constitué de **sommets**, dont certains sont reliés par des **arêtes**.
- Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées (fléchées). On distingue alors le sommet **origine** de l'arête et son **extrémité**.
- Deux sommets reliés par au moins une arête sont dits **adjacents**.
- Une arête partant et arrivant au même sommet est appelée **boucle**.

### 1.2 Ordre d'un graphe, degré des sommets

**Activité 2 (Vocabulaire sur les graphes) :** Graphe non orienté.

**Définitions :**

- L'**ordre d'un graphe** est le nombre de sommets de ce graphe.
- Dans un graphe, le **degré de chaque sommet** est le nombre d'arêtes dont il est l'*une des extrémités*.

**Remarque :** **Attention!** Il ne faut pas oublier de compter *deux fois* les boucles, car le sommet est deux fois l'extrémité de cette arête.

**Exemple :** Dans le graphe de la figure 1, le degré du sommet A est 4.

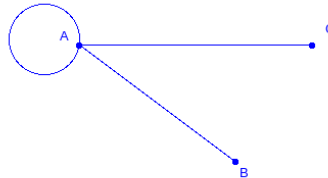


FIG. 1 – Un graphe contenant une boucle

**Propriété :** La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égal au *double* du nombre total d'arêtes de ce graphe.  
En particulier, c'est un nombre **pair**.

**Remarque :** Pour une idée de la démonstration de cette propriété, voir l'activité 2 de la feuille photocopiée.

### 1.3 Graphe simple, graphe complet

**Définition :** On ne considère que des graphes non orientés.

Un **graphe simple** est un graphe *sans boucle* dont chaque couple de sommets est relié par *au plus* une arête.

**Exemples :**

- Les graphes des figures 2 et 3 sont des graphes simples.



FIG. 2 – Un exemple de graphe simple

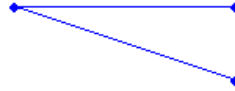


FIG. 3 – Un autre exemple de graphe simple

– Le graphe de la figure 1 et de la figure 4 ne sont pas des graphes simples.

**Attention !**

Dans le cas des graphes **orientés**, la définition d'un graphe simple est légèrement différente. Ainsi, le graphe de la figure 5 est simple car les deux arêtes les deux sommets *ne sont pas les mêmes*.

Par contre, le graphe de la figure 6 n'est pas simple (deux fois la même arête) et celui de la figure 7 non plus (contient une boucle).

**Définition :** On ne considère que des graphes non orientés.

Un **graphe complet** est un graphe *simple* dont tous les sommets sont adjacents.

**Remarques :** A l'ordre près des sommets, pour un ordre donné, il n'existe qu'un seul graphe non orienté complet.

**Exemples :**

1. Le graphe de la figure 2 est *le* graphe complet d'ordre 2.
2. Le graphe de la figure 3 n'est pas complet car il manque une arête.
3. Le graphe de la figure 4 n'est pas complet car il n'est pas simple.
4. Le graphe de la figure 8 est *le* graphe complet d'ordre 3.
5. Le graphe de la figure 9 est *le* graphe complet d'ordre 4.
6. Le graphe de la figure 10 est *le* graphe complet d'ordre 5.

**Attention !**

Dans le cas des graphes **orientés**, la définition d'un graphe complet est légèrement différente. Ainsi, le graphe de la figure 5 est complet car il est *simple* et contient *toutes les arêtes possibles* entre les deux sommets.

**Propriété :** Dans le graphe non orienté complet d'ordre  $n$ , tous les sommets sont de degré  $n - 1$ .

**Exercices :** 1, 2 page 223<sup>2</sup> – 4, 6 page 223<sup>3</sup> – 7, 8, 10 page 223<sup>4</sup> – 14, 15 page 224<sup>5</sup> – 18 page 224<sup>6</sup> [Déclic]

<sup>1</sup>Révisions sur les matrices.

<sup>2</sup>QCM – Vrai-faux.

<sup>3</sup>Vocabulaire sur les graphes.

<sup>4</sup>Existence de graphes donnés.

<sup>5</sup>Construction de graphes.

<sup>6</sup>Un jeu de plage...



FIG. 4 – Un exemple de graphe non simple



FIG. 5 – Un graphe orienté simple



FIG. 6 – Un graphe orienté non simple

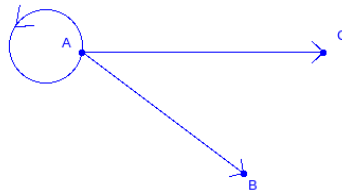


FIG. 7 – Graphe orienté contenant une boucle

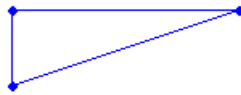


FIG. 8 – Le graphe complet d'ordre 3

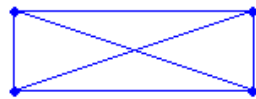


FIG. 9 – Le graphe complet d'ordre 4

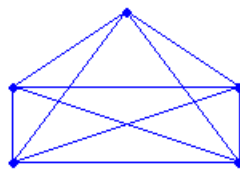


FIG. 10 – Le graphe complet d'ordre 5

## 2 Matrice associée à un graphe

Activité 3 (Vocabulaire sur les graphes) : Matrice associée à un graphe

### 2.1 Définitions

**Définition 1 :**

La **matrice associée à un graphe non orienté** d'ordre  $n$  est une matrice d'ordre  $n$ .

Le coefficient situé à l'intersection de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne est égal au nombre d'arêtes reliant le sommet  $i$  du graphe au sommet  $j$ .

**Exemple :** La matrice associée au graphe de la figure 11 est :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

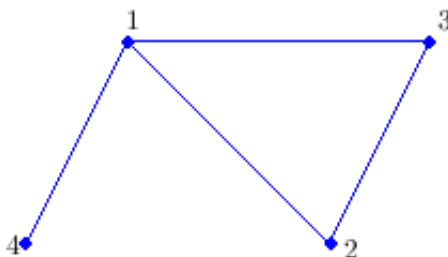


FIG. 11 – Matrice associée à un graphe non orienté

**Remarques :**

1. La matrice associée à un graphe *non orienté* est toujours une matrice **symétrique**.
2. On peut retrouver le degré d'un sommet à partir de la matrice associée au graphe. Pour un graphe non orienté *ne comportant pas de boucle*, il suffit de faire la somme des coefficients sur la ligne (ou sur la colonne) correspondante au sommet.

**Exercice :** Comment retrouver le sommet si à celui-ci correspond une (ou plusieurs) boucle(s) ?

**Définition 2 :**

La **matrice associée à un graphe orienté** d'ordre  $n$  est une matrice d'ordre  $n$ .

Le coefficient situé à l'intersection de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne est égal au nombre d'arêtes **d'origine** le sommet  $i$  du graphe et **d'extrémité** sommet  $j$ .

**Exemple :** La matrice associée au graphe de la figure 12 est :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Remarques :**

1. La matrice associée à un graphe *orienté* **n'est pas nécessairement** une matrice **symétrique**.

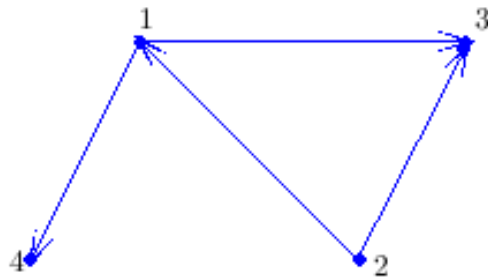


FIG. 12 – Matrice associée à un graphe orienté

2. On peut retrouver le degré d'un sommet à partir de la matrice associée au graphe. Pour un graphe orienté, il suffit de faire la somme des coefficients sur la ligne **et** sur la colonne correspondants au sommet (il faut compter deux fois les coefficients de la diagonale, qui correspondent aux boucles).
3. Chaque arête **d'un graphe orienté** apparaît une fois et une seule dans la matrice associée. Pour obtenir le nombre d'arêtes *d'un graphe orienté*, il suffit donc de faire la somme des coefficients de la matrice associée.

**Exercices :** 40, 42 page 227<sup>7</sup> – 43, 45 page 227<sup>8</sup> – 47 page 227<sup>9</sup> [Déclic]

## 2.2 Chaînes d'un graphe

### Définitions :

- Dans un graphe *non orienté*, une **chaîne** est une suite d'arêtes mises bout à bout reliant deux sommets du graphe.
- Dans un graphe *orienté*, une **chaîne** est une suite d'arêtes orientées telles que l'extrémité de l'une est l'origine de l'autre.
- Un **cycle** est une chaîne dont les extrémités coïncident, et qui est composée d'arêtes **toutes distinctes** (on peut par contre passer plusieurs fois par le même sommet).
- La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes qui la constituent.

**Remarque :** Une chaîne est notée par la liste des sommets par laquelle elle passe, reliés par un segment ou par une flèche lorsque le graphe est orienté.

### Exemples :

1. Quelques chaînes du graphe de la figure 11 :
  - 4 – 1 – 3 – 2 (longueur 3)
  - 1 – 2 – 3 (longueur 2)
  - 4 – 1 – 2 – 3 – 2 (longueur 4)
  - 1 – 2 – 3 – 1 (cycle de longueur 3)
2. Une chaîne du graphe de la figure 12 :  $2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 4$ .

**Propriété :** Soit  $A$  la matrice associée à un graphe  $G$  et  $p$  un nombre entier naturel.

Le coefficient de  $A^p$  situé à l'intersection de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne est égal au nombre de chaînes de longueur  $p$  reliant le sommet  $i$  au sommet  $j$ .

**Remarque :** Pour une idée de la démonstration (basée sur le produit de matrices), voir l'Activité 3 de la feuille polycopiée.

**Exercices :** 41 page 227<sup>10</sup> – 50, 51, 54, 55 page 228<sup>11</sup> – 59 page 229<sup>12</sup> [Déclic]

<sup>7</sup>QCM – Vrai-faux.

<sup>8</sup>Matrice à partir du graphe.

<sup>9</sup>Propriétés du graphe à l'aide de sa matrice.

<sup>10</sup>QCM.

<sup>11</sup>Chaînes de longueur  $p$ .

<sup>12</sup>Plus difficile.

### 3 Théorème d'Euler

Dans toute cette section , tous les graphes considérés seront *non orientés*.

#### 3.1 Graphe connexe

**Activité 1 (Connexité, théorème d'Euler) :** Liaisons dans un réseau

**Définition :** Un graphe est **connexe** si on peut relier deux *quelconques* de ses sommets par une **chaîne** (éventuellement réduite à une arête).

**Exemples :**

1. On se réfère au graphe de la figure 13.

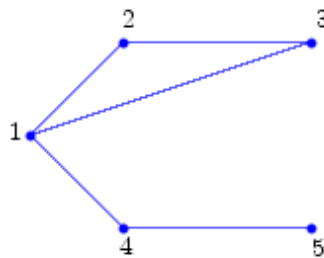


FIG. 13 – Un graphe connexe

Paire de sommets	Chaîne
1 ; 2	1 - 2
1 ; 3	1 - 3
1 ; 4	1 - 4
1 ; 5	1 - 4 - 5
2 ; 3	2 - 3
2 ; 4	2 - 1 - 4
2 ; 5	2 - 1 - 4 - 5
3 ; 4	3 - 1 - 4
3 ; 5	3 - 1 - 4 - 5
4 ; 5	4 - 5

Le graphe de la figure est donc connexe.

2. On se réfère au graphe de la figure 14. Il n'y a pas de chaîne entre les sommets 1 et 4, le graphe n'est donc pas connexe.

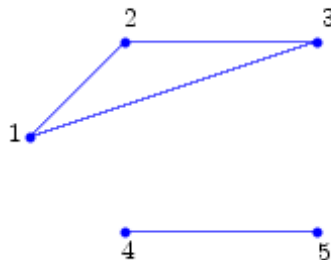


FIG. 14 – Un graphe non connexe

**Remarques :**

1. Tout graphe **complet** est **connexe**.
2. Si un graphe n'est pas connexe, il ne peut pas être complet.

**Exercices :** 31, 32 page 226<sup>13</sup> [Déclic]

**Définitions :** Soit  $G$  un graphe **connexe**.

1. On appelle **distance** entre deux sommets du graphe la **longueur de la plus courte chaîne** qui relie ces deux sommets.
2. On appelle **diamètre du graphe** la **plus grande distance** constatée entre deux sommets quelconques du graphe.

**Exemple :** Dans le graphe de la figure 13, le diamètre est de 3 (voir le tableau de l'exemple précédent).

**Exercices :** 52, 53 page 228<sup>14</sup> [Déclic]

### 3.2 Chaîne eulérienne, cycle eulérien

**Définition 1 :** Une **chaîne eulérienne** est une **chaîne** satisfaisant aux conditions suivantes :

- elle contient **toutes** les arêtes du graphe ;
- chaque arête n'est décrite **qu'une seule fois**.

**Remarque :** On peut donc passer plusieurs fois par le même sommet, mais pas par la même arête.

**Exemple :** Dans le graphe de la figure 15, la chaîne  $2 - 1 - 4 - 3 - 2 - 5 - 3$  est une chaîne eulérienne.

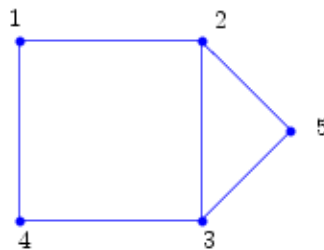


FIG. 15 – Graphe contenant une chaîne eulérienne

**Définition 2 :** Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne dont le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont les mêmes.

**Exemple :** Dans le graphe de la figure 16, le cycle  $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1$  est un cycle eulérien.

**Exercices :** 23, 24 page 225<sup>15</sup> [Déclic]

**Définition 3 :** On appelle **graphe eulérien** un graphe que l'on peut dessiner **sans jamais lever le crayon** et **sans passer deux fois** par la même arête.

**Propriété :** Un graphe est eulérien *si et seulement si* il contient une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.

<sup>13</sup>Graphes connexes.

<sup>14</sup>Diamètre d'un graphe.

<sup>15</sup>Vrai - Faux.

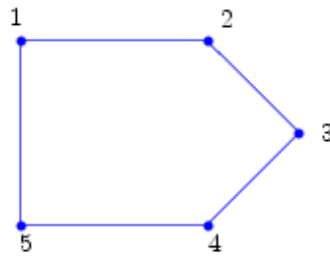


FIG. 16 – Graphe contenant un cycle eulérien

### 3.3 Théorème d'Euler

**Activité 2 (Connexité, théorème d'Euler) :** Circulation sur un graphe

**Théorème d'Euler :**

1. Un graphe admet un **cycle eulérien** si et seulement si il est **connexe** et n'a **aucun sommet de degré impair**.
2. Un graphe admet une **chaîne eulérienne** entre les sommets  $x$  et  $y$  si et seulement si il est **connexe** et si  $x$  et  $y$  sont les **deux seuls sommets de degré impair**.

**Remarque :** Ce théorème donne donc deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un graphe soit eulérien.

### 3.4 Algorithme d'Euler

**Méthode :** Détermination pratique d'une chaîne eulérienne.

On considère le graphe de la figure 17.

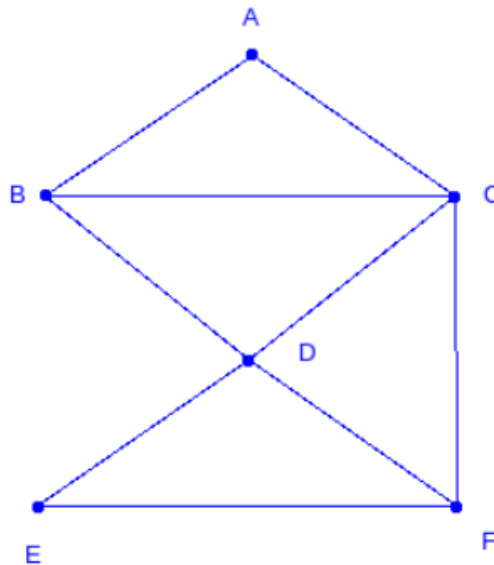


FIG. 17 – Détermination pratique d'une chaîne eulérienne (1)

Il est connexe. Le tableau suivant donne les degrés des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	2	3	4	4	2	3

Il a seulement deux sommets de degré impair : le sommet B et le sommet F.

Il existe donc une chaîne eulérienne entre les sommets B et F.

Pour la déterminer, on suit les étapes suivantes :

1. On choisit une chaîne d'origine le sommet B et d'extrémité le sommet F, **ne contenant jamais deux fois le même arête**.  
Ici, la chaîne **B - D - F** convient (en rouge sur la figure 18).
2. On choisit un sommet de la chaîne précédente et, à partir de ce sommet, on adjoint un **cycle** (donc une chaîne fermée ne contenant pas deux fois la même arête) **ne contenant pas des arêtes déjà utilisées**.  
Ici, on peut choisir le sommet B et le cycle **B - A - C - B** (en vert sur la figure 18).  
On obtient alors la chaîne **B - A - C - B - D - F**, qui vérifie les hypothèses de départ :
  - elle a comme origine B et comme extrémité F ;
  - elle ne contient pas deux fois la même arête.
3. On réitère l'étape 2 sur la chaîne obtenue jusqu'à avoir utilisé toutes les arêtes du graphe. La chaîne obtenue est alors par construction eulérienne.  
Ici, on choisit ensuite le sommet C et on adjoint le cycle **C - D - E - F - C** (en bleu sur la figure 18 )

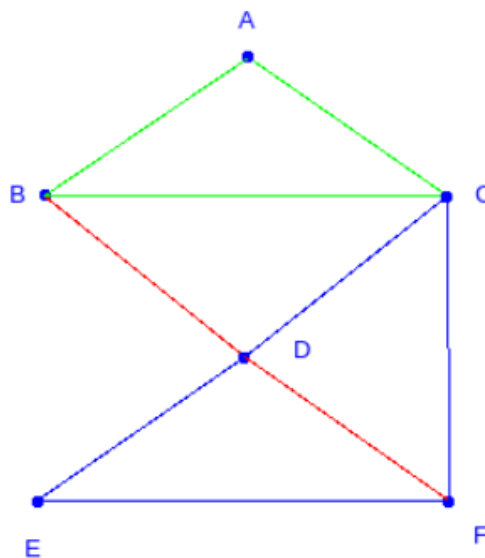


FIG. 18 – Détermination pratique d'une chaîne eulérienne (2)

On obtient la chaîne **B - A - C - D - E - F - C - B - D - F**. On a utilisé toutes les arêtes du graphe. Cette chaîne est donc eulérienne.

#### Remarques :

1. Il n'est pas toujours nécessaire d'employer cet algorithme pour déterminer une chaîne eulérienne.
2. Il n'y a pas unicité de la chaîne eulérienne trouvée.
3. Pour un cycle eulérien, il suffit de suivre la même méthode en partant à l'étape 1 d'un cycle à partir d'un des sommets quelconque du graphe.

**Exercices :** 25, 27, 28 page 225<sup>16</sup> – 29 page 225 et 34 page 226<sup>17</sup> – 36 page 226 et 60 page 229<sup>18</sup> [Déclic]

## 4 Coloriage des sommets d'un graphe

Dans toute cette section , tous les graphes considérés seront *non orientés*.

<sup>16</sup>Détermination de chaîne ou cycle eulérien.

<sup>17</sup>Problèmes concrets.

<sup>18</sup>Problèmes type BAC.

## 4.1 Notion de sous-graphe

**Définition :** Un **sous graphe** d'un graphe  $G$  est un graphe constitué de *certain*s sommets de  $G$  et de *toutes* les arêtes qui les relient.

**Exemple :** Si  $G$  est le graphe complet d'ordre 4 (voir figure 9), alors le graphe de la figure 19 est un sous-graphe de  $G$  mais le graphe de la figure 20 n'en est pas un.



FIG. 19 – Un sous-graphe du graphe complet d'ordre 4



FIG. 20 – Pas un sous-graphe du graphe complet d'ordre 4

**Définition :** Un sous-graphe **stable** est un sous-graphe sans arête.

## 4.2 Nombre chromatique

**Activité :** 4 page 211<sup>19</sup> [Déclic]

**Définitions :**

1. **Colorier** un graphe consiste à affecter une couleur à chacun des sommets de sorte que deux sommets **adjacents** ne soient pas de la même couleur.
2. Le nombre chromatique d'un graphe  $G$  est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour le colorier. On le note  $\gamma(G)$ .

**Remarque :** Si plusieurs sommets d'un graphe sont de la même couleur, aucune arête ne les joignent. Ils forment donc un **sous-graphe stable**.

**Colorier** un graphe revient donc à le **partitionner** en sous-graphes stables.

**Propriété :** Soit  $D$  le degré maximal des sommets du graphe  $G$ .

Alors :  $\gamma(G) \leq 1 + D$ .

## 4.3 Algorithme de Welsh-Powell

**Exemple :** On reprend le dernier graphe de l'activité 4 page 211 [Déclic] (voir figure 21)

1. On range les sommets du plus haut degré au plus petit :
  - Sommet P : degré 3
  - Sommet A : degré 5
  - Sommet D : degré 2
  - Sommet E : degré 2
  - Sommet I : degré 1

<sup>19</sup>Coloriage.

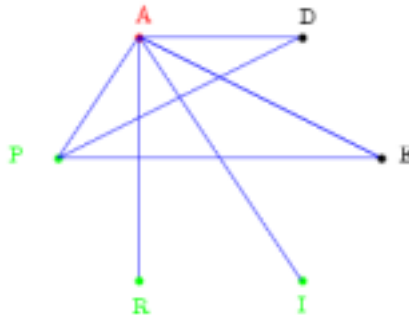


FIG. 21 – Coloriage d'un graphe

– Sommet R : degré 1

d'où la liste ordonnée des sommets :

Sommet	A	P	D	E	I	R
Degré	5	3	2	2	1	1

2. On choisit une couleur pour le premier sommet (ici, le sommet A)
3. On colorie de la même couleur tous les sommets non adjacents au sommet A et qui ne sont pas adjacents entre eux. Ici, il n'y en a pas.
4. On réitère ce procédé avec une autre couleur pour le premier sommet non colorié de la liste : ici, le sommet P, et on peut colorier de la même couleur les sommets R et I.
5. On recommence jusqu'à épuisement des sommets : ici, on choisit une couleur pour le sommet D et on peut colorier le sommet E de la même couleur.

**Remarque :** L'algorithme de Welsh-Powell ne donne pas nécessairement le nombre minimal de couleurs. Ici, on a pu colorier ce graphe avec trois couleurs, on peut donc en déduire uniquement que  $\gamma(G) \leq 3$ .

**Exercices :** 65 page 230 et 68 page 231<sup>20</sup> [Déclic]

#### 4.4 Cas d'un graphe complet

Dans un graphe complet, comme tous les sommets sont adjacents, il faut une couleur différente par sommet. On en déduit le résultat suivant :

**Propriété :** Le **nombre chromatique** d'un graphe **complet** est égal à l'**ordre de ce graphe**.

En conséquence, on a, dans un graphe quelconque :

**Propriété :** Le **nombre chromatique** d'un graphe  $G$  est supérieur ou égal à l'**ordre du sous-graphe complet** de  $G$  le plus **grand**.

**Exemple :** On reprend le graphe de la figure 21.

Le sous-graphe PAD est complet d'ordre 3, par suite  $\gamma(G) \geq 3$ .

Or, on a déjà vu grâce à l'algorithme de WELSH-POWELL que  $\gamma(G) \leq 3$ .

On a donc  $\gamma(G) = 3$ .

**Remarques :**

1. Ceci donne une méthode pratique de détermination du nombre chromatique :
  - trouver un sous-graphe complet donne un minorant du nombre chromatique ;
  - colorier le graphe grâce à l'algorithme de WELSH-POWELL donne un majorant du nombre chromatique ;
  - si ce minorant et ce majorant sont égaux, il s'agit du nombre chromatique.

<sup>20</sup>Coloriage de graphes.

2. La détermination du nombre chromatique permet, entre autres, de partitionner de manière *optimale* un graphe en sous-graphe stables donc de régler des problèmes de compatibilité/incompatibilité (voir exercices).

**Module :** activité 5 page 211<sup>21</sup> [Déclic]

**Exercices :** 61, 63 page 230<sup>22</sup> – 64, 66 page 230<sup>23</sup> – 69, 70, 73 page 231<sup>24</sup> – 67 page 230<sup>25</sup> [Déclic]

**Exercices de synthèse :** 74, 75 page 232, 79 page 233 et 84, 85 page 235<sup>26</sup> – 77 page 232 et 78 page 233<sup>27</sup> [Déclic]

## Références

[Déclic] DÉCLIC Terminale ES, *enseignement obligatoire et option*, HACHETTE ÉDUCATION, 2006.

3, 4, 7, 9, 11, 12, 13, 14

---

<sup>21</sup>Compatibilité/incompatibilité.

<sup>22</sup>Sous-graphes complets.

<sup>23</sup>Détermination de nombre chromatique.

<sup>24</sup>Compatibilité, incompatibilité.

<sup>25</sup>Autre application du coloriage.

<sup>26</sup>Type BAC.

<sup>27</sup>Retour sur les graphes orientés.