Conservatoire National
des Arts et des Métiers
CNAM-Liban
ISSAE

Prof: J.SAAB

Automates, Codes et Graphes
Fiche de TD3

---

1. On considère le codage par parité $[4; 3]$. On voudrait envoyer le mot $C = 001$, soit p la probabilité qu'un bit reçu soit faux.

   Trouver en fonction de p la proportion de tous les mots de code non détectés parmis tous les mots faux. Conclure

---

2. On considère le codage par répétition de 3 : $[3, 1]$. On vodrait envoyer le mot $C = 1$, soit p la probabilité qu'un bit reçu soit faux.

   (a) Trouver en fonction de p, la proportion des mots non détectés parmis tous les faux mots. Conclure

   (b) Si on reçoit le mot 011 comment peut-on le corriger?

---

3. Trouver la distance minimale du codage donné par:

$$\begin{array}{cccc} f: & B^2 & \longrightarrow & B^4 \\ & 00 & \rightarrow & 0000 \\ & 10 & \rightarrow & 0110 \\ & 01 & \rightarrow & 1011 \\ & 11 & \rightarrow & 1100 \end{array}, \qquad \text{où } B = \{0; 1\}$$

---

4. On considère le codage $[6, 2, d]$ tel que :

$$f(00) = 000000, \qquad f(10) = 101010$$
$$f(01) = 011110 \qquad f(11) = 111000$$

   (a) Trouver $d_{\min}$ la distance minimale du codage.

   (b) Combien d'erreurs ce codage peut-il détecter?

---

5. Combien d'erreurs peut-on corriger pour un codage $[12, 4]$?

---

6. On considère un code $[n, k, d]$. On construit un code de longueur $(n + 1)$ en ajoutant le bit 1 à la fin du mot de l'ancien code.

   (a) Quelle est la distance minimale du nouveau code?

   (b) Même question si on ajoute deux bits 1. Conclure.

---

7. Si l'on peut envoyer 512 bits par milliseconde dans un tube binaire symétrique, avec un risque de 1%, combien de faux message aurait-on envoyé après 3 heures?

---

8. On utilise un tube binaire dissymétrique, pour envoyer des mots de longueur n. La probabilité d'une mauvaise transmission pour le bit 0 est p_0 ($q_0 = 1 - p_0$) et la probabilité d'une mauvaise transmission du bit 1 est p_1 ($q_1 = 1 - p_1$).

   Soient u_0 le nombre de mauvaise transmission du bit 0 et u_1 le nombre de mauvaise transmission du bit 1. Soit w le poids du message initial.

   (a) Quelle est la probabilité que u erreurs (dont les positions sont connues) aient lieu? Exprimer cette probabilité en fonction de $p_0, p_{1,} q_0, q_1, u_0, u_1, w$

   (b) Soit $n = 4$. Trouver, en fonction du poids du message, la probabilité de 2 erreurs de transmission.

---

9. On considère le codage $[n, k, 2t + 1]$. On construit un nouveau codage de longueur $(n + 1)$, en ajoutant un bit à la fin de l'ancien mot, de sorte que le poids du nouveau mot de code soit pair. Trouver la distance minimale du nouveau code.

---

10. On considère le code $[n, k, d]$. On construit un nouveau code de longueur $2n$ en répétant deux fois l'ancien mot de code. Trouver la distance minimale de ce nouveau codage

---

11. On considère deux codages $[n_1, k, d_1]$ et $[n_2, k, d_2]$. On construit un nouveau codage de longueur $n_1 + n_2 - k$ en ajoutant après le bloc les bits de contrôle du premier code, suivis des bits de contrôle du second code. Montrer que la distance minimale du nouveau code est supérieure à $d_1 + d_2 - k$.

---

12. On construit un code $[2k, k]$ en ajoutant à la fin du bloc son complémentaire. Quelle est la distance minimale de ce code?

---

13. On transmet un message de longueur n à travers un tube binaire symétrique. Quelle est la probabilité d'avoir s erreurs, si les erreurs ont lieu sur des bits consécutifs?

---

14. On code un bloc de k bits, en ajoutant un bit de contrôle, de sorte que le poids du mot de code soit pair.

    (a) Montrer que ce codage est linéaire

    (b) Trouver la distance minimale d.

    (c) Ce codage est-il correcteur?

---

15. Soit G la matrice génératrice d'un codage linéaire:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

    (a) Trouver tous les mots de code

    (b) Donner la distance minimale d

    (c) Donner la matrice de contrôle.

    (d) Donner le tableau standard

    (e) Corriger par deux méthodes le mot $R = 11111$. (vérifier votre correction)

    (f) Corriger R on utilisant la distance minimale

(g) Combien d'erreurs ce codage peut-il détecter? corriger?

(h) Ce codage est-il parfait?

---

16. Mêmes questions que l'exercice précédent, si la matrice génératrice G est donnée par:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

17. On considère le codage défini par l'application f suivante:

$$f(a_1a_2a_3a_4) = a_1a_2a_3a_4(a_1 \oplus a_2)(a_1 \oplus a_3)(a_1 \oplus a_4).$$

(a) Combien de mots de code a-t-on?

(b) Combien de mots a-t-on?

(c) Donner le rendement de ce codage

(d) Montrer que ce codage est linéaire, et trouver l'application φ correspondante.

(e) Soit $R = 1010100$. Trouver la distance parmis tous les mots de code et R. Déduire une correction de R

(f) Utiliser la méthode du syndrôme pour corriger R

(g) Combien d'erreurs ce codage peut-il détecter? Corriger?

(h) Soit q la probabilité qu'un mot soit transmis sans erreurs. Quelle est la probabilité qu'un mot soit mal transmis?

---

18. On considère la fonction de codage suivante:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & B^2 & \longrightarrow & B^5 \\ & ab & \rightarrow & ab(a \oplus b)ab \end{array}$$

(a) Vérifier que ce codage est linéaire.

(b) Donner la matrice génératrice, et la matrice de contrôle de ce codage.

(c) Trouver tous les mots de code et déduire la distance minimale.

(d) Ce codage est-il parfait?

(e) Soient $m = 11010$ et $m' = 01110$.

1. m et m' sont-ils des mots de code?
2. Trouver $m \oplus C$ pour tous les mots de code C et déduire un mot de code C_1 tel que $m \oplus C_1$ a le plus petit poids.
3. Peut-on trouver un mot de code C_2 tel que $w(m' \oplus C_2)$ soit minimale?
4. Soitent C_0 le mot de code transmis, et m le message reçu. Si la probabilité de mal transmission d'un bit est $p = 0,1$ quelle est la probabilité que $C_0 \neq C_1$?

---

19. Dire si les matrices suivantes engendrent un codage linéaire avec $n = 5$ et $k = 3$.

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

20. (a) Vérifier que les mots binaires suivants sont linéairement indépendants:

$$v_1 = 00111, \quad v_2 = 10101, \qquad v_3 = 11011$$

(b) Définir n, k, et r pour le codage linéaire engendré par $v_1,\ v_2$ et v_3.

(c) Donner le rendement de ce code.

(d) Donner une matrice génératrice G de ce code.

(e) Trouver tous les mots de code et déduire la distance minimale.

(f) Combien d'erreurs ce codage peut-il détecter? Corriger?

(g) Ce codage est-il systématique?

(h) Trouver un codage systématique équivalent à ce codagė (c.à.d trouver G', matrice canonique génératrice de ce code)

(i) Calculer $||V||^2$ et $||V'||$ avec $V = 10011$ et $V' = 1010101$. Déduire une condition sur un vecteur B pour qu'il soit orthogonal à lui-même.

(j) Soit G' la matrice trouvée plus haut, associée au codage systématique, et soit $C_1 = 11111$ un mot transmis. Trouver le syndrôme de C_1.

---

21. On considère le codage donné par la matrice génératrice suivante:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Ecrire G sous forme échelonnée en utilisant les opérations élémentaires.

(b) Donner tous les mots de code

(c) Ce codage est-il cyclique?

(d) Trouver $d_{\min}$, la matrice de contrôle H et donner le tableau du syndrôme.

---

22. Les codes suivants, donnés par leur ,matrice génératrice sont-ils cycliques?

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

23. Construire un code polynômial de longueur 8 et de polynôme générateur $g(X) = X^5 \oplus X^4 \oplus X \oplus 1$

---

24. On considère le code polynômial, défini par le polynôme générateur $g(X) = X^4 \oplus X \oplus 1$.

(a) Donner la matrice génératrice G associée à ce codage

(b) Donner la matrice canonique G' associée à ce code par deux méthodes (opérations élémentaires et division des polynômes par $g(X)$).

(c) Ce codage est-il cyclique?

(d) Pour chacun des blocs suivants, donner le mot de code associé, en utilisant deux méthodes (la matrice G et la division du polynôme associé par $g(X)$) : $m_1 = 010101, \quad m_2 = 101010, \quad m_3 = 110011$

(e) Ecrire la matrice de contrôle H de ce code, en déduire que ce code corrige de façon certaine au moins une erreur.

(f) Quelle est la distance minimale de ce code? Ce code est-il parfait?

(g) Calculer les syndrômes des messages suivants par deux méthodes (en utilisant la matrice de contrôle, et en effectuant la division des polynômes associés par $g(X)$) : $a = 0000111111$, $b = 0111001110$

(h) Déduire une correction des messages a et b

---

25. Soit le code systématique C défini par les équations de parité suivantes

$$\begin{aligned} c_1 &= d_2 + d_3 + d_4 \\ c_2 &= d_1 + d_2 + d_3 \\ c_3 &= d_1 + d_2 + d_4 \\ c_4 &= d_1 + d_3 + d_4 \end{aligned}$$

où $[d_1, d_2, d_3, \acute{d}_4]$ sont les bits d'informations et $[c_1, c_2, c_3, c_4]$ sont les bits de parité (bits de redondance) d'un mot de code. Un mot de code s'écrit donc $[d_1, d_2, d_3, \acute{d}_4, c_1, c_2, c_3, c_4]$.

(a) Déterminer les paramètres n, longueur du mot de code, k, longueur du mot d'information et le rendement de C.

(b) Lister tous les mots de code de C et déterminer la distance minimale $d_{\min}$ du code.

(c) Combien d'erreurs le code peut détecter et combien d'erreurs il peut corriger?

(d) Donner une matrice génératrice G de C sous forme systématique.

(e) Déterminer la matrice de parité H du code C. Quel est le code dual du code C?

(f) On décide de construire un nouveau code $C^{'}$ en ne gardant que les mots de code de poids 4. Le code $C^{'}$ est-il un code linéaire?

---

26. (a) Lister tous les mots du code de parité $C(3, 2)$ et donner sa $d_{\min}$

(b) Lister tous les mots du code $C(3, 2)$ avec une parité impaire et donner sa $d_{\min}$

(c) Lequel des deux codes vous choisissez?

---

27. On considère le code de Hamming $(7, 4)$

(a) Calculer les matrices génératrice et de parité de ce code

(b) Encoder la suite de bits 100101001010

(c) Décoder la suite de bits 1110110011010101110001100111 (on suppose qu'il y a au plus 1-erreur sur 7 bits cosécutifs).

---

28. On cosidère le code binaire linéaire C de matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver le code dual $C^{\perp}$ et montrer que C est auto-orthogonal.
