Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date:Mars-Durée:2h00
$1^{\text{ière}}$ Session-
2013-2014

Sujet coordonné par: J.Saab
Proposé pour les centres d'enseignement de
Beyrouth-Baakline-Baalbek-Ghazza-
Tripoli-Bickfaya-Nahr Ibrahim
Langue de l'éxamen: Français

Est autorisé:
Calculatrice Programmable

Examen de Final
Base de l'analyse Mathématique - MVA010

1. $(30pts)$ Partie A

On appelle f et g deux fonctions définies sur l'intérvalle $[0,+\infty[$ par

$$f(x)=\ln(1+x)-x \text{ et } g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$$

(a) Etudier les sens de variations de f et g sur $[0,+\infty[$
Solution:$(1pt+\frac{1}{2}pt+1pt+\frac{1}{2}pt)$ $f'(x)=-\frac{x}{x+1}\leq 0$ et $f\searrow$ de 0 à $-\infty$ et $g'(x)=\frac{x^2}{x+1}\geq 0$ et $g\nearrow$ de 0 à $+\infty$

(b) En déduire que pour tout $x\geq 0$:

$$x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x$$

Solution: $(2pt+2pt)$ On a $g(x)\geq 0$ c'est à dire $\ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{2}$ aussi $f(x)\leq 0$ et donc $\ln(1+x)\leq x$ et parsuite $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$

Partie B

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par

$$u_1=\frac{3}{2} \text{ et } u_{n+1}=u_n(1+\frac{1}{2^{n+1}})$$

(a) Montrer par récurrence que $u_n>0$ pour tout entier naturel $n\geq 1$
Solution: $(1pt)$ $u_1>0$, supposons par récurrence que $u_n>0$ et donc $u_{n+1}=u_n(1+\frac{1}{2^{n+1}})>0$

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geq 1$:

$$\ln(u_n)=\ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{1}{2^2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{2^n})$$

Solution: $(4pts)$ $\ln u_1 = \ln(\frac{3}{2}) = \ln(1+\frac{1}{2}) = \ln(1+\frac{1}{2^1})$. Supposons par récurrence que

$$\ln(u_n) = \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{2^2}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{2^n})$$

montrons que $\ln(u_{n+1}) = \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{2^2}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{2^n}) + \ln(1+\frac{1}{2^{n+1}})$. En effet, $\ln(u_{n+1}) = \ln u_n + \ln(1+\frac{1}{2^{n+1}})$ et d'après l'hypothèse de récurrence on obtient

$$\ln(u_{n+1}) = \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{2^2}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{2^n}) + \ln(1+\frac{1}{2^{n+1}}).$$

(c) On pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n}$.

À l'aide de la première partie, montrer que

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

Solution: $(4pts)$ On a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$ ainsi

$$\begin{array}{rc}
x = \frac{1}{2}: & \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \leq \ln(1+\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2} \\
x = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}: & \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{4^2} \leq \ln(1+\frac{1}{2^2}) \leq \frac{1}{2^2} \\
\vdots & \vdots \\
x = \frac{1}{2^n}: & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\frac{1}{4^n} \leq \ln(1+\frac{1}{2^n}) \leq \frac{1}{2^n}
\end{array}$$

et en faisant la somme membre à membre on trouve que $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$

(d) Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim_{n\to\infty} S_n$ et $\lim_{n\to\infty} T_n$.

Solution: $(2pts + 2pts + 1pt + 1pt)$ Il s'agit de la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et puis $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}[\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}] = 1 - \frac{1}{2^n} \\
T_n &= \frac{1}{4}[\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}] = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{4^n})
\end{aligned}$$

et donc $\lim S_n = 1$ et $\lim T_n = \frac{1}{3}$

(e) Étude de la convergence de la suite (u_n) :

1. Montrer que (u_n) est strictement croissante
   Solution: $(1pt)$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$ et donc (u_n) est strictement croissante.
2. En déduire que (u_n) est convergente. Soit l sa limite
   Solution: $(2pts + 1pt)$On a $\ln u_n \leq S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ et donc $\ln u_n \leq 1$ c'est à dire $u_n \leq e$. Ainsi, (u_n) est croissante et majorée donc elle est convergente vers une limite que l'on note l
3. Montrer que $\dfrac{5}{6} \leq \ln l \leq 1$ et en déduire un encadrement de l

Solution: $(4pts)$ On a $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$ donc

$$1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{4^n}) \leq \ln u_n \leq 1 - \frac{1}{2^n}$$

comme $\ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$ alors par passage à la limite

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{6} &\leq l \leq 1 \\ \frac{5}{6} &\leq \ln l \leq 1 \end{aligned}$$

---

2. $(25\,pts)$ Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^{\tan x} - \cos x}{\sin x}$$

(a) Donner le développement limité de $\sin x, \cos x$ et $\tan x$ en 0 à l'ordre 4

Solution:$(2pts + 2pts + 4pts)$

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{array}{r|l} x - \frac{x^3}{6} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \cline{2-2} x - \frac{x^3}{2} & x + \frac{x^3}{3} \\ \hline \frac{x^3}{3} & \\ & \end{array}$$

et donc $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$

(b) En déduire le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 3

Solution: $(3pts + 6pts)$On a

$$e^{\tan x} = e^{[x + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)]} = 1 + (x + \frac{x^3}{3}) + \frac{1}{2}(x + \frac{x^3}{3})^2 + \frac{1}{6}(x + \frac{x^3}{3})^3 + \frac{1}{24}(x + \frac{x^3}{3})^4 + x^4\varepsilon(x)$$

donc

$$e^{\tan x} = 1 + (x + \frac{x^3}{3}) + \frac{1}{2}(x^2 + \frac{2}{3}x^4) + \frac{1}{6}(x^3) + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

c'est à dire $e^{\tan x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + x^4\varepsilon(x)$. Il en vient que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^4) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) + x^4\varepsilon(x)}{x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)} \\ &= \frac{x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + x^4\varepsilon(x)}{x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)} \\ &= \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)}{1 - \frac{1}{6}x^2 + x^3\varepsilon(x)} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{array}{l|l} 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3 & 1-\frac{1}{6}x^2 \\ \cline{2-2} 1-\frac{1}{6}x^2 & 1+x+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x^3 \\ \hline x+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3 & \\ x-\frac{1}{6}x^3 & \\ \hline \frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x^3 & \\ \frac{2}{3}x^2 & \\ \hline \frac{1}{2}x^3 & \end{array}$$

Finalement

$$f(x) = 1 + x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

(c) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Soit g le prolongement de f
Solution: $(2pts)$On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ finie, donc f est prolongeable par continuité en 0

(d) Définir g et montrer qu'elle est dérivable en 0. Donner $g'(0)$
Solution:$(2pts)$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x+x\varepsilon(x)-1}{x} = 1$ et donc $g'(0) = 1$

(e) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0 et préciser la position de cette tangente par rapport à la courbe de g au voisinage de 0
Solution: $(1pt + 1pt)$au voisinage de 0 on a $g(x) = f(x) = 1 + x + \frac{2}{3}x^2 + x^2\varepsilon(x)$. L'équation de la tangente à la courbe de g en 0 est

$$y = 1 + x$$

Aussi $g(x) - y \simeq \frac{2}{3}x^2 > 0$ et donc la courbe est au dessus de la tangente en 0

(f) Donner une valeur approchée de $f(0.001)$ et la comparer avec la valeur obtenue par la calculatrice. Expliquer cette legère différence.
Solution: $(2pt)$ $f(0,001) = f(10^{-3}) \simeq 1 + (10^{-3}) + \frac{2}{3}(10^{-6}) + \frac{1}{2}(10^{-9}) \simeq 1.001$. Par contre la calculatrice donne $f(0.001) \simeq 1.000017159$.La différence à l'ordre de 10^{-3} est dûe

au fait que la calculatrice utilise un dévéloppement limité jusqu'à un ordre assez élevé alors que dans cet exercice on ne fait qu'un dévéloppement à l'ordre 3

---

3. $(35pts)$

(a) Résoudre l'équation différentiel $z' - \dfrac{1}{x}z = \ln x \quad (E)$
Solution: $(Et1 : 4pts + Et2 : 5pts)$Il s'agit d'une équation linéaire qu'on va faire sur deux étapes

Et1: Soit l'équation

$$z' - \frac{1}{x}z = 0 \qquad (S)$$

donc $\frac{z'}{z} = \frac{1}{x}$ et $\ln z = \ln cx$ et parsuite $z = cx$ est la SG de (S)
Et2: Posons $z = f(x).x$ la SG de (E) où f est à trouver. On a $z' = f'(x)x + f(x)$. Substituons dans (E) :

$$f'(x)x = \ln x$$

et donc $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$ et $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2} + c$ et $z = (\dfrac{(\ln x)^2}{2} + c)x$ est la SG de (E)

(b) Déduire les solutions de $2yy' - \dfrac{1}{x}y^2 = \ln x \quad (B)$

Solution: $(3pts + 2pt)$C'est l'équation de Bernouilli, posons $z = y^2$ donc $z' = 2yy'$ et (B) devient

$$z' - \frac{1}{x}z = \ln x$$

qui est l'équation (E). La SG de (B) est donc $y^2 = (\dfrac{(\ln x)^2}{2} + c)x$

(c) Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = \sin^2 x \quad (L)$

Solution: $(SG : 6pts; SP : 5pts + 8pts$;solution:$2pts)$ Soit l'équation sans m2^{nd} membre

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad (S)$$

d'e'quation caractéristique

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad (C)$$

de racines $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$. La SG de (S) est

$$y_G = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

D'autre part, on a $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$
Cherchons une SP de $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2} \quad (1)$ et une autre pour l'équation $y'' - 3y' + 2y = -\frac{1}{2}\cos 2x \quad (2)$
$x = 0$ n'est pas racine de (C) posons alors $y_p = a$ une SP de (1) il en vient que $y_p = \frac{1}{4}$.
Aussi, $y_q = a\cos 2x + b\sin 2x$. est une SPde (2) donc

$$\begin{aligned} y_q' &= -2a\sin 2x + 2b\cos 2x \\ y_q'' &= -4y_q \end{aligned}$$

Dans (2) :

$$\begin{aligned} -2y_q - 3y_q' &= -\frac{1}{2}\cos 2x \\ (-2a - 6b)\cos 2x + (-2b + 6a)\sin 2x &= -\frac{1}{2}\cos 2x \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{cases} -2a - 6b &= \frac{-1}{2} \\ -2b + 6a &= 0 \end{cases}$$

$a = \frac{1}{40}, b = \frac{3}{40}$ et $y_q = \frac{1}{40}(\cos 2x + 3\sin 2x)$. Une SP de (L) est $y_r = y_p + y_q$ soit

$$y_r = \frac{1}{40}(\cos 2x + 3\sin 2x + 10)$$

et la SG de (L) est $y = y_G + y_r$ soit

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{40}(\cos 2x + 3\sin 2x + 10)$$

---

4. $(10pts)$Soit l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$

Vérifier que l'on peut utiliser le théorème de la moyenne en déduire que $I < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solution: (conditions:$4pts$; application:$4pts$; résultat:$2pts$) Soit $f(x) = \sin x,\ g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sont continues et $g(x)$ est positive, donc d'après le théorème de la moyenne il existe $c \in]0, \frac{\pi}{4}[$ tel que

$$I = f(c) \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x) dx$$

et donc $I = \sin c < \sin \frac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ car sin est croissante sur $]0, \frac{\pi}{4}[$
