Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers

le cnam Liban

Base de l'analyse réelle (MVA010)

Rattrapage 2017-2018 **2h :00**

Téléphone et Calculatrice sont interdites

Examen proposé par : J.SAAB
pour les centres de Beyrouth, Baalbek, Bikfaya, Nahr Ibrahim, Tripoli.

Exercice 1 (*20 points*) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } 2u_{n+1} = u_n - 1, \quad \forall n \geq 0$$

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n).
2. Soit (w_n) la suite numérique définie, pour tout entier n, par $w_n = u_n + a$ où a est un nombre réel.
   (a) Déterminer le nombre a tel que (w_n) soit une suite géométrique. Quelle est alors la raison de (w_n) ? son premier terme ?
   (b) Déterminer une expression de w_n en fonction de n. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

SOLUTION. 1

1. $u_0 = 1$; $u_1 = 0$; $u_2 = -\frac{1}{2}$; $u_3 = -\frac{3}{4}$ $\boxed{\text{2pts}}$
2. $w_n = u_n + a$
   (a) $w_{n+1} = u_{n+1} + a = \dfrac{u_n - 1}{2} + a = \dfrac{u_n - 1 + 2a}{2} = \frac{1}{2}(u_n - 1 + 2a) = q(u_n + a) = qw_n$ pour $q = \frac{1}{2}$ et $-1 + 2a = a$ $\boxed{\text{4pts}}$. Ainsi $w_n = u_n + 1$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{2pts}}$. Dans ce cas $w_0 = 2$. $\boxed{\text{2pts}}$
   (b) $w_n = w_0 q^n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ $\boxed{\text{2pts}}$ et $u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} - 1$ $\boxed{\text{2pts}}$.
3. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n-1}} = -\dfrac{1}{2^n} < 0$ et (u_n) est strictement décroissante $\boxed{\text{4pts}}$ et comme $u_n > -1$ alors (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente. $\boxed{\text{2pts}}$

Exercice 2 (20 *points*) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) : \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. La fonction est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ?
2. Calculer la dérivée de f en tout point x où la dérivée existe.
3. Donner le développement limité de f en l'infini à l'ordre 3. En déduire l'équation de l'asymptote ainsi que sa position par rapport à la courbe de f.

SOLUTION. 2

1. Lorsque $x \to 0^+$, $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ et $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$ et $f(x) \to -\infty$ donc f n'est pas continue en 0 $\boxed{\text{3pts}}$ et parsuite elle n'est pas dérivable en 0 $\boxed{\text{2pts}}$.
2. $f'(x) = \frac{d}{dx}[\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}] = \left[\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - 1\right)\right] = \dfrac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \quad \forall x \neq 0$ $\boxed{\text{3pts}}$.
3. $f(x) = (1 - X)e^X$ où $X \to 0$ lorsque $x \to \infty$ et odnc

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - X)(1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3) + X^3\varepsilon(X)) \\ &= 1 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{3}X^3 + X^3\varepsilon(X) \\ &= 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(x) \quad \boxed{\text{6pts}}. \end{aligned}$$

$y = 1$ est une asymptote $\boxed{\text{3pts}}$ et $f(x) - y \simeq -\frac{1}{2x^2} < 0$ donc la courbe est au dessous de l'asymptote$\boxed{\text{3pts}}$.

Exercice 3 (*20 points*) : Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes

$$I = \int_0^{\pi} x \sin(x) dx$$

1. On rappelle que pour tout x réel $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.
   En posant $t = \pi - x$ montrer que :
   $$\int_0^{\pi} x \sin(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin(x) dx$$
   En déduire la valeur de I.
2. Retrouver la valeur de I en utilisant une intégration par parties.

SOLUTION. 3

1. On a $dx = -dt$ et

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi x\sin(x)dx \\ &= \int_\pi^0 (\pi - t)\sin(\pi - t)(-dt) \ \boxed{\text{2pts}}. \\ &= \pi\int_0^\pi \sin t dt - \int_0^\pi t\sin t dt \\ &= \pi\int_0^\pi \sin t dt - I \ \ \boxed{\text{3pts}} \\ 2I &= \pi\int_0^\pi \sin t dt \\ I &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin x dx \ \ \boxed{\text{3pt}} \\ &= -\frac{\pi}{2}[\cos t]_0^\pi \ \ \boxed{\text{2pts}}. \\ I &= \pi \ \ \boxed{\text{3pt}} \end{aligned}$$

2. $I = \int_0^\pi x\sin(x)dx = \int_0^\pi xd(-\cos x)dx$ $\boxed{\text{2pts}}$ $= [x(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi(-\cos x)dx$ $\boxed{\text{3pts}}$ $= \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi$ $\boxed{\text{2pts}}$

Exercice 4 (*16 points*) : On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y(x) - 6y^{'}(x) = 2 \qquad (E)$$

1. Trouver la solution générale de (E).
2. Déduire la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 1$.

SOLUTION. 4

1. $y - 2 = 6y^{'}$ donc $z = 6z^{'}$ où $z = y - 2$.

$$\begin{aligned} \frac{z^{'}}{z} &= \frac{1}{6} \\ \ln z &= \frac{1}{6}x + c \\ z &= ke^{\frac{1}{6}x} \\ y &= ke^{\frac{1}{6}x} + 2. \ \boxed{\text{12 pts}} \end{aligned}$$

2. $y(0) = 1$ donc $1 = k + 2$ et $y = -e^{\frac{1}{6}x} + 2$. $\boxed{\text{4 pts}}$

Exercice 5 (*24 points*) : On considère l'équation différentielle linéaire de second ordre :

$$y^{''} - 2y^{'} + y = xe^x \qquad (E)$$

Trouer la solution de (E) qui vérifie : $y(0) = 1$ et $y^{'}(0) = 1$.

SOLUTION. 5

'équation caractéristique associée à l'ESSM de (E) est

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda - 1)^2 &= 0 \quad (C) \end{aligned}$$

$\lambda = 1$ est une racine double de (C) $\boxed{2\text{pts}}$ et donc la solution générale de l'ESSM associée à (E) est

$$y_g = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad \boxed{4\text{pts}}$$

D'autre part $f(x) = xe^x = P_n(x)e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 1$ racine double de (C) et $n = 1$ alors posons

$$\begin{aligned} y_p &= x^2(ax + b)e^x \\ &= (ax^3 + bx^2)e^x \ \boxed{4\text{pts}} \end{aligned}$$

comme solution particulière de (E). On a

$$\begin{aligned} y_p^{'} &= y_p + (3ax^2 + 2bx)e^x \\ &= [ax^3 + (b + 3a)x^2 + 2bx]e^x \quad \boxed{2\text{pts}} \\ y_p^{''} &= [3ax^2 + 2(b + 3a)x + 2b + (ax^3 + (b + 3a)x^2 + 2bx)]e^x \\ &= [ax^3 + (6a + b)x^2 + (4b + 6a)x + 2b]e^x \quad \boxed{2\text{pts}} \end{aligned}$$

Comme $y_p^{''} - 2y_p^{'} + y_p = xe^x$ alors $(6ax + 2b) = x$ et donc $a = \frac{1}{6}$ et $b = 0$ $\boxed{2+2=4\text{pts}}$ ainsi $y_p = \frac{1}{6}x^3 e^x$ et la solution générale de (E) et

$$\begin{aligned} y &= y_g + y_p \\ &= c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x \\ &= [c_1 + c_2 x + \frac{1}{6}x^3]e^x \quad \boxed{2\text{pts}} \end{aligned}$$

On a $y^{'} = y + (c_2 + \frac{1}{2}x^2)e^x$ $\boxed{2\text{pts}}$. La condition initiale $y(0) = 1$ et $y^{'}(0) = 1$ donne

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ 1 + c_2 &= 1 \end{aligned}$$

donc $y = (\frac{1}{6}x^3 + 1)e^x$ $\boxed{2\text{pts}}$