

Base de l'analyse réelle (MVA010)  
Partiel 2018-2019 ⌚ 1h :30



Téléphone et Calculatrice programmable sont interdits

Examen proposé par : J.SAAB  
pour les centres de Beyrouth, Baalbek, Bikfaya, Nahr Ibrahim, Tripoli.

**Exercice 1 (25 points)** Soit  $a$  un réel donné. On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x+a}{x-2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Quelle valeur faudrait-il donner à  $a$  pour que  $f$  soit prolongeable par continuité en 0?
2. Tracer la courbe de  $g$ , le prolongement de  $f$  par continuité en 0, pour la valeur de  $a$  ainsi trouvée.
3. Expliquer d'abord géométriquement, ensuite par calcul, pourquoi la fonction  $g$  n'est-elle pas dérivable en 0.

**SOLUTION. 1**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = l = 1$  et donc  $a = -2$  8 pts

2.

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & \text{if } x \geq 0 \\ 1 & \text{if } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{4pts}$$

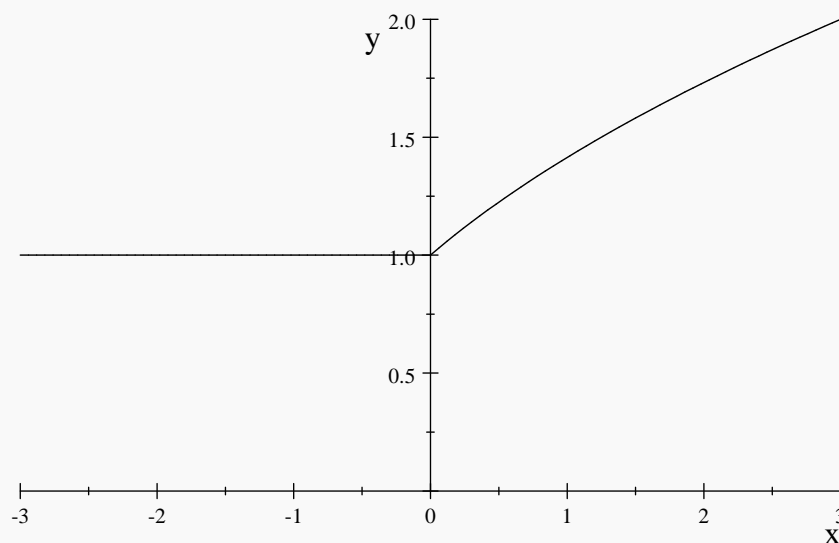


figure : 4pts

3. La fonction  $g$  n'est pas dérivable en 0 car la courbe admet deux demi tangentes en ce point 4pts. Analytiquement :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{2}$$

et par suite  $g$  n'est pas dérivable en 0. 5pts

**Exercice 2 (25 points)** : On considère la fonction  $f = x^3 \ln(1+x)$  définie sur  $] -1, +\infty[$

- Donner le développement limité de  $f(x)$  en 0 à l'ordre 6.
- Déduire les valeurs de  $f^{(k)}(0)$ ,  $k = 1 \dots 6$  où  $f^{(k)}(0)$  est la dérivée d'ordre  $k$  de  $f(x)$  en 0.

**SOLUTION. 2**

1.  $f(x) = x^3(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)) = x^4 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^6}{3} + x^6\varepsilon(x)$  10pts

2.  $f(x) = \sum_{k=0}^6 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^6\varepsilon(x)$  3pts et donc  $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ ;  $\frac{f^{(4)}(0)}{24} =$

1;  $\frac{f^{(5)}(0)}{120} = -\frac{1}{2}$ ;  $\frac{f^{(6)}(0)}{720} = \frac{1}{3}$ . D'où

$$f^{(4)}(0) = 24; f^{(5)}(0) = -60; f^{(6)}(0) = 240$$

12pts=2ptsx6

**Exercice 3 (25 points)** :

- (a) Etudier la variation de  $f(x) = x - 1 - \ln x$  sur son domaine de définition  
(b) En déduire que  $\ln x \leq x - 1$  pour tout  $x > 0$ .
- Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction  $g(t) = t \ln(t)$  sur  $[1, 1+x]$ ,  $x > 0$ , pour montrer que

$$1 < \frac{(1+x) \ln(1+x)}{x} < 1+x$$

3. En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \ln(1+x)}{x}$

**SOLUTION. 3**

1. (a)  $D_f = ]0, +\infty[$ , 2pts  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ , 4pts d'où le T.D.V :

$x$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	<span style="float: right;">4pts</span>
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

- (b)  $f(x) \geq 0$  et donc  $\ln x \leq x - 1$  pour tout  $x > 0$ . 2pts

2.  $t \geq 1 > 0$  et donc  $g$  vérifie les conditions du T.A.F. 2pts donc il existe  $c \in ]1, 1+x[$ :

$$g(1+x) - g(1) = g'(c) \cdot x \quad \text{2pts}$$

$(1+x) \ln(1+x) = (\ln c + 1)x$  c'est à dire

$$\frac{(1+x) \ln(1+x)}{x} = (\ln c + 1) \quad \text{3pts}$$

Comme  $c > 1$  alors  $\ln c > 0$  et donc  $\ln c + 1 > 1$ . Aussi, d'après b)  $\ln c < \ln(1+x) < (1+x) - 1 = x$  2pts et par suite

$$1 < \frac{(1+x) \ln(1+x)}{x} < 1+x \quad \text{2pts}$$

3. Par passage à la limite dans l'encadrement précédent :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \ln(1+x)}{x} = 1$  2pts



**Exercice 4 (25 points)** : On considère la fonction  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \ln(x^2 - 4)}{|x^2 + x| + (x^2 + x)}$

1. Citer les trois conditions nécessaires pour que  $f$  soit bien définie.
2. Déterminer le domaine de définition de  $f$  et exprimer la sans la valeur absolue
3. On suppose que  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ,  $x \in D_f$ .

- (a) Calculer les dérivées  $g'(x)$  et  $h'(x)$  en déduire la dérivée  $f'(x)$
- (b) Donner l'équation de la droite tangente à la courbe de  $f$  au point  $x = 3$ .

#### SOLUTION. 4

1.  $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ ,  $x^2 - 4 > 0$ ,  $x^2 + x > 0$  3pts
2.  $(x \geq 2 \text{ ou } x \leq -1)$  et  $(x > 2 \text{ ou } x < -2)$  et  $(x > 0 \text{ ou } x < -1)$  c'est à dire  $D = ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$  5pts

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \ln(x^2 - 4)}{2(x^2 + x)}; \quad x \in D \quad \text{4pts}$$

3. (a)  $g'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} + \frac{2x}{x^2-4}$ ;  $h'(x) = 4x+2$ ; 4pts

$$f'(x) = \frac{\left[ \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} + \frac{2x}{x^2-4} \right] (2(x^2+x)) - (4x+2) \left[ \sqrt{x^2-3x+2} + \ln(x^2-4) \right]}{4(x^2+x)^2} \quad \text{4pts}$$

- (b)  $f(3) = \frac{\sqrt{2} + \ln 5}{24}$ ;  $f'(3) = \frac{1}{144}\sqrt{2} - \frac{7}{288} \ln 5 + \frac{1}{20}$  2pts

$$(T) : y - f(3) = f'(3)(x - 3) \quad \text{3pts}$$

