Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers
le cnam Liban

Base de l'analyse réelle (MVA010)

Ratrappage 2018-2019 **3h :**

Téléphone et Calculatrice programmable sont interdits

Examen proposé par : J.SAAB
pour les centres de Beyrouth, Baalbek, Nahr Ibrahim.

Exercice 1 (20 *points*) : Soit la fonction réelle

$$f(x) = \frac{e^x - \sqrt{1-x^2}}{\ln(1+2x)}$$

1. Donner le développement limité de $\sqrt{1-x^2}$, $e^x - \sqrt{1-x^2}$ ansi que celui de $\ln(1+2x)$ en 0 à l'ordre 3
2. Déduire le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2
3. Déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et donner la fonction $g(x)$, prolongement de $f(x)$ par continuité en 0.
4. Quelle est l'équation de la tangente en 0 à la courbe de g ainsi que sa position par rapport à cette courbe

SOLUTION. 1

1. $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x)$ $\boxed{3pts}$; $e^x - \sqrt{1-x^2} = [1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3] - [1-\frac{1}{2}x^2] + x^3\varepsilon(x) = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ $\boxed{3pts}$; $\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ $\boxed{2pts}$
2. $f(x) = \dfrac{x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)}{2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)} = \dfrac{1 + x + \frac{1}{6}x^2 + x^2\varepsilon(x)}{2 - 2x + \frac{8}{3}x^2 + x^2\varepsilon(x)} = \frac{1}{2} + x + \frac{5}{12}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ $\boxed{4pts}$
3. $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$ finie, donc f est prolongeable par continuité en 0 $\boxed{2pts}$ et son prolongement g est donnée par
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \sqrt{1-x^2}}{\ln(1+2x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \boxed{2pts}$$
4. On a $g(x) = \frac{1}{2} + x + \frac{5}{12}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ pour tout x voisin de 0 et donc la tangente est $y = \frac{1}{2} + x$ $\boxed{2pts}$. D'autre part, $g(x) - y \sim \frac{5}{12}x^2 > 0$ et donc la courbe est au dessus de la tangente $\boxed{2pts}$

Exercice 2 (15 points) On considère la fonction

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Montrer que g vérifie les conditions de Rolle sur l'intervalle $[0,1]$ et donner la valeur du réel c qui vérifie $g^{'}(c) = 0$. On rappelle que les conditions de Rolle sur un intervalle $[a,b]$ vérifiée par une fonction f sont : f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur$]a,b[$, $f(a) = f(b)$ et dans ces conditions il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{'}(c) = 0$.

SOLUTION. 2

On a $\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$ donc g est continue en 0 et elle est constinue pour $x > 0$ donc g est continue sur $[0,1]$ $\boxed{3pts}$. Aussi, g est dé'rivable pour $x > 0$ donc g est dérivable sur $]0,1[$ $\boxed{1pts}$ On a aussi, $g(0) = g(1) = 0$ $\boxed{1pts}$ donc les conditions de Rolle sont satisfaites. Il existe $c \in]0,1[$ tel que $g^{'}(c) = 0$ soit

$$2c \ln c + c = 0 \quad \boxed{4pts}$$

comme $c \neq 0$ $\boxed{2pts}$ alors $2\ln c + 1 = 0$ et $c = e^{-1/2}$ $\boxed{4pts}$

Exercice 3 (15 points) On définit la suite récurrente (u_n) par

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \text{ avec } \ u_0 = 1.$$

1. Montrer par récurrence que cette suite est positive, croissante et majorée par 3.
2. En déduire qu'elle est convergente et trouver sa limite.

SOLUTION. 3

1. $u_0 = 1 > 0$, on suppose par récurrence que $u_n > 0$ il en vient que $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} > 0$ et parsuite $u_n > 0$, $\forall n$ $\boxed{3pts}$. D'un autre coté

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n + 3} - u_n \\ &= \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \end{aligned}$$

   Aussi, $0 < u_0 < 3$, en supposant par récurrence que $0 < u_n < 3$ on déduit que $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} < \sqrt{9} = 3$ et parsuite la suite est majorée ar 3 $\boxed{4pts}$. Maintenant le signe de $u_{n+1} - u_n$ dépend de celui du numérateur, sachant que le trinôme $-x^2 + 2x + 3$ est posititive sur l'intervalle $[-1,3]$ d'où $u_{n+1} - u_n > 0$ car $0 < u_n < 3$ et (u_n) est croissante $\boxed{4pts}$. La suite (u_n) est donc positive, croissante et majorée par 3

2. Etant croissante et majorée, la suite (u_n) est convergente $\boxed{1pts}$. soit $\lim_{n\to\infty} u_n = l$. Comme $\sqrt{2x+3}$ est continue sur $]0,3[$ alors $l = \sqrt{2l+3}$ càd $l = -1$ ou $l = 3$ et comme $u_n > 0$ alors $l = 3$. $\boxed{3pts}$

Exercice 4 (30 points) Calculer :

1. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-6x+5}dx$
2. $\displaystyle\int x^2e^{3x}dx$
3. $\int_1^e (\ln x)^2 dx$

SOLUTION. 4

1. $I = \displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)(x-5)}dx$; On a $\dfrac{x+1}{(x-1)(x-5)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-5}$ $\boxed{2pts}$ $= \dfrac{(a+b)x-(5a+b)}{(x-1)(x-5)}$.
Soit
$$\begin{cases} a+b &= 1 \\ 5a+b &= -1 \end{cases}$$
et $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$ $\boxed{6pts}$. $I = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-5} = -\frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{3}{2}\ln(x-5) + c$ $\boxed{2pts}$
2.
$$\begin{array}{ccc} x^2 & & e^{3x} \\ 2x & \searrow & \frac{1}{3}e^{3x} \\ 2 & \searrow & \frac{1}{9}e^{3x} \\ 0 & \searrow & \frac{1}{27}e^{3x} \end{array}$$
$I = x^2(\frac{1}{3}e^{3x}) - 2x(\frac{1}{9}e^{3x}) + 2(\frac{1}{27}e^{3x}) + c = [\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}]e^{3x} + c$ $\boxed{10pts}$
3. $u = (\ln x)^2,\ du = 2\ln x.\frac{1}{x}dx;\ dv = dx$ et $v = x$ $\boxed{3pts}$
$$I = \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - 2\int_1^e \ln x dx \quad \boxed{3pts}$$
Sachant que $\int \ln x dx = x\ln x - x$ $\boxed{2pts}$ et donc $I = e - 2[(e-e) - (-1)] = e - 2$ $\boxed{2pts}$

Exercice 5 Déterminer la nature de :

1. $S_1 = \sum (\frac{1}{5})^n$
2. $S_2 = \sum (\frac{-1}{3})^n$
3. $S_3 = \displaystyle\sum \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$
4. $S_4 = \displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{n}.\ln n}$
5. Donner la valeur de chacune des séries convergentes dans les parties précédentes.

SOLUTION. 5

1. C'est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et $|q| < 1$ alors elle est convergente $\boxed{2pts}$. Elle converge vers $\frac{1}{1-q} = \frac{5}{4}$ $\boxed{2pts}$
2. De même que 1) $q = \frac{-1}{3}$ et $|q| = \frac{1}{3} < 1$ la série est convergente $\boxed{2pts}$ vers $\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$ $\boxed{2pts}$

3. $\dfrac{9}{(3n+1)(3n+4)} \sim \frac{1}{n^2}$; $\alpha = 2 > 1$ alors la série converge $\boxed{2pts}$.

$$\frac{9}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{a}{3n+1} + \frac{b}{3n+4} \quad \boxed{1pts}$$

donc

$$\begin{cases} (3a+3b)n & = & 0 \\ 4a+b & = & 9 \end{cases}$$

ainsi $a = 3, b = -3$ $\boxed{2pts}$. $S_n = 3\sum_{k\geq 0}^{n} \left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4}\right)$ $\boxed{1pts}$ $= 3\left[(1-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4}-\frac{1}{7}) + (\frac{1}{7}-\frac{1}{10}) + \cdots + (\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4})\right] = 3[1-\frac{1}{3n+4}] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$ et $S = 3$ $\boxed{3pts}$

4. $\ln n < n^\alpha$ pour tout $\alpha > 0$ lorsque $n >>$ en particulier $\ln n < n^{\frac{1}{4}}$ et donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}.\ln n} > \dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ $\boxed{2pts}$ et S est divergente car $\alpha = \frac{1}{4} < 1$. $\boxed{1pts}$