

Institut des Sciences  
Appliquées et Économiques  
ISAE-Cnam Liban  
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date: Juillet -Durée: 2h  
Rattrapage  
2016-2017

Sujet coordonné par:  
Proposé pour les centres d'enseignement  
Beyrouth-Baakline-Baalbek-  
Tripoli-Bickfaya  
Langue de l'examen: Français

Est autorisé:  
Calculatrice Non Programmable

**Rattrapage**  
**Base de l'analyse réelle - MVA010**

1. (25pts)

- Déterminer le degré du premier terme non nul du développement limité de:  $x^2 \cos x$  et de celui de:  $\sin x - shx$  en 0.
- Pour assurer un développement limité de  $f(x) = \frac{\sin x - shx}{x^2 \cos x}$  à l'ordre 3 en 0, jusqu'à quel ordre faudrait-il développer son numérateur et son dénominateur?
- Donner le développement limité de  $f(x) = \frac{\sin x - shx}{x^2 \cos x}$  au voisinage de 0 à l'ordre 3
- En déduire une valeur approchée de  $f(0.3)$
- En déduire que  $f$  est prolongeable par continuité en 0. Donner son prolongement  $g$
- Trouver l'équation de la tangente en 0 à la courbe de  $g$  et préciser sa position par rapport à la courbe

---

Solution:

a)  $x^2 \cos x \sim x^2(1 - \dots) \sim x^2$ ;  $(\sin x - shx) \sim [(x - \frac{x^3}{6} \dots) - (x + \frac{x^3}{6} \dots)] \sim -\frac{x^3}{3}$ . Ainsi, le premier terme du DL de  $x^2 \cos x$  est de degré 2 et le premier terme du DL de  $\sin x - shx$  est de degré 3.

b) Pour assurer un DL de  $f(x)$  à l'ordre 3 il faudrait développer chacun de ses composantes à l'ordre  $3 + 2 = 5$

$$\text{a) } f(x) = \frac{(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)) - (x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x))}{x^2(1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x))} = \frac{-\frac{x^3}{3} + x^5\varepsilon(x)}{x^2 - \frac{x^4}{2} + x^5\varepsilon(x)} =$$

$$\frac{-\frac{1}{3}x + x^3\varepsilon(x)}{1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x)} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$\text{b) } f(0.3) \simeq -\frac{1}{3}(0.3) - \frac{1}{6}(0.3)^3 = 0.1045$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  finie donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

d)  $y = -\frac{1}{3}x$  est la tangente à la courbe de  $g$  en 0.  $g(x) - y \simeq -\frac{1}{6}x^3$  donc si  $x$  est à droite de 0 alors la courbe est au dessous de la tangente et si  $x$  est à gauche de 0 alors la courbe est au dessus de la tangente. (La tangente coupe la courbe en ce point et on a un point d'inflexion).

2. (15pts) Soient les intégrales:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$$

Calculer  $I + J$  et  $I - J$  en déduire  $I$  et  $J$ .

Solution:

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \frac{1}{8}\pi^2; \quad I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) dx = \frac{\pi}{2} \sin(2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx = \frac{1}{4} \cos(2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2};$$

En résolvant le système linéaire, on obtient  $I = \frac{1}{16}\pi^2 - \frac{1}{4}; \quad J = \frac{1}{16}\pi^2 + \frac{1}{4}$ .

3. (24pts) Trouver les primitives suivantes

$$\text{(a) } I = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$$

$$\text{(b) } J = \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{(c) } K = \int \frac{\sinh x}{1 + \sinh x} dx$$

---

Solution:

a)  $I = \int \frac{dx}{1+(x-1)^2} = \arctan(x-1) + c$

b)  $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$ . Il est facile de montrer que  $a = -1$  et  $b = 1$  et  $I = -\ln(x-1) + \ln(x-2) + c$

c)  $K = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2 + e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{e^{2x} - 1}{2e^x + e^{2x} - 1} dx = \int \frac{t^2 - 1}{(t^2 + 2t - 1)t} dt$ .

Or  $\frac{t^2 - 1}{(t^2 + 2t - 1)t} = \frac{t^2 - 1}{(t + 1 + \sqrt{2})(t + 1 - \sqrt{2})t} = \frac{a}{t + 1 + \sqrt{2}} + \frac{b}{t + 1 - \sqrt{2}} + \frac{c}{t}$ ; Par comparaison, on obtient

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}; b = -\frac{1}{\sqrt{2}}; c = 1$$

ainsi  $K = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(t + 1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(t + 1 - \sqrt{2}) + \ln t + cte$ .

---

4. (20pts) On considère la suite  $(u_n)_n$  donnée par:

$$0 < u_0 < 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

Démontrer que  $(u_n)_n$  converge vers 0

---

Solution:

On suppose par récurrence que  $0 < u_n < 1$  et on montre que  $0 < u_{n+1} < 1$ . En effet,  $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ . On a  $1 - u_n > 0$  et  $u_n > 0$  donc  $u_{n+1} > 0$ , aussi  $u_{n+1} = u_n - u_n^2 < u_n < 1$  et donc  $0 < u_{n+1} < 1$  par suite

$$0 < u_n < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

D'autre part,  $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$  donc  $(u_n)$  est décroissante et  $u_n > 0$  donc  $(u_n)$  est minorée par suite elle converge vers une limite  $l$  telle que  $l = l - l^2$  et par suite  $l = 0$ .

---

5. (16pts) Résoudre l'équation différentielle de second ordre  $y'' - 3y' + 2y = \sin x$

---

Solution: La SG de l'ESSM:  $y'' - 3y' + 2y = 0$  est  $y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$  où  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . D'autre part, 0 n'est pas une racine de l'équation caractéristique  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ , on va donc poser

$$y_p = a \sin x + b \cos x$$

comme solution particulière de l'EASM:  $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ . En remplaçant  $y_p$  dans l'équation on trouve

$$y_p = \frac{1}{10}(\sin x + 3 \cos x)$$

la SG de l'EASM est  $y = y_g + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{10}(\sin x + 3 \cos x)$ .

---