

Est autorisé:
Calculatrice Non Programmable

Final
Base de l'analyse réelle - MVA010

1. (20pts) Considérons la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{2}{U_n}) \end{cases}$$

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n > \sqrt{2}$.
(b) Dédurre que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution:

- (a) $U_1 = \frac{3}{2} > \sqrt{2}$, [2pts] on suppose par récurrence que $U_n > \sqrt{2}$. [1pt]
On a

$$U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{U_n^2 - 2\sqrt{2}U_n + 2}{2U_n} = \frac{(U_n - \sqrt{2})^2}{2U_n} > 0 \quad [6pts]$$

ainsi $U_{n+1} > \sqrt{2}$ et par suite la suite est minorée par $\sqrt{2}$. [1pt]

- (b) On a $U_{n+1} - U_n = \frac{2 - U_n^2}{2U_n} < 0$ car $U_n > \sqrt{2}$, [5pts] ainsi (U_n) est décroissante [1pt]. Comme elle est minorée alors elle est convergente vers une certaine limite $l \in \mathbb{R}$ [1pt] La fonction $x \rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}$ est continue $\forall x > \sqrt{2}$ donc $l = f(l)$ [1pt] c'est à dire $2l^2 = l^2 + 2$ et donc $l = \sqrt{2}$ car $l \geq \sqrt{2}$. [2pts]

-
2. (18pts) Utiliser le développement limité pour trouver les limites suivantes

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

Solution:

(a) Soit $t = x - 1 \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 1$. $\boxed{1\text{pt}}$ On a $f(x) = \frac{(t+1) \ln(1+t)}{t} = \frac{(t+1)(t+t\varepsilon(t))}{t} = 1+t+t\varepsilon(t)$ $\boxed{4\text{pts}}$ et donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(x) = 1$ $\boxed{1\text{pt}}$

(b) Soit $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. $\boxed{1\text{pt}}$ On a $f(x) = \frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{1 - (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1 + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t) - 1 + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)}{1 - (1 - \frac{1}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t))} = \frac{t^2 + t^2\varepsilon(t)}{\frac{1}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)} = \frac{1 + \varepsilon}{\frac{1}{2} + \varepsilon} = 2 + \varepsilon$. $\boxed{4\text{pts}}$ Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(x) = 2 \quad \boxed{1\text{pt}}$$

(c) On a $f(x) = x - \sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = x[1 - \sqrt{1 + t^2}]$ où $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. $\boxed{1\text{pt}}$ Il en vient que

$$\begin{aligned} f(x) &= x[1 - 1 - \frac{1}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)] \\ &= x(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x)) \\ &= \frac{-1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x) \quad \boxed{4\text{pts}} \end{aligned}$$

par suite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) = 0$. $\boxed{1\text{pt}}$

3. (17pts) On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$$

- (a) Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}
 (b) Calculer I_0 en déduire I_2

Solution

- (a) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \sqrt{1-x} dx$. Posons $u = x^{n+1}$, $dv = (1-x)^{\frac{1}{2}} dx$,
 donc $du = (n+1)x^n dx$ et $v = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$. [2pts]

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} x^{n+1} \right]_0^1 + \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 x^n (1-x) \sqrt{1-x} dx \\ &= \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx - \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 x^{n+1} \sqrt{1-x} dx \quad [4pts] \\ &= \frac{2}{3}(n+1)[I_n - I_{n+1}] \end{aligned}$$

Ainsi, $[1 + \frac{2}{3}(n+1)]I_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)I_n$ c'est à dire $\frac{2n+5}{2}I_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)I_n$, soit

$$I_{n+1} = \frac{4(n+1)}{6n+15} I_n \quad [2pts]$$

- (b) On a $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{2}{3}(0-1) = \frac{2}{3}$. [3pts]

$$I_1 = \frac{4}{15} I_0 = \frac{8}{45} \quad [1pt]$$

$$I_2 = \frac{8}{21} I_1 = \frac{64}{945} \quad [1pt]$$

4. (15pts) Soit l'intégrale

$$I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx$$

- (a) Montrer que $I = \frac{a}{2}$, (Poser $u = a-x$)

(b) Déduire sans effectuer de calcul les intégrales suivantes:

1. $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{3-x}} dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

Solution:

(a) On a $du = -dx$; $I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)} dx = \int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(u)+f(a-u)} (-du) = \int_0^a \frac{f(a-u)}{f(u)+f(a-u)} du = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)} dx$. [8pts] Ainsi

$$2I = \int_0^a dx$$
$$I = \frac{a}{2} \text{ [2pts]}$$

1. Pour $f(x) = \sqrt{x}$, on a $I = \frac{3}{2}$. [2.5pts]
2. Pour $f(x) = \sin x$, on a $I = \frac{\pi}{4}$. [2.5pts]

5. (15pts) Résoudre l'équation différentielle de premier ordre suivante

$$xy' + y - xe^x = 0 \quad (E)$$

Vérifier qu'il existe exactement une solution de (E) qui vérifient $y(1) = 1$

Solution

On a $y' + \frac{1}{x}y = e^x$ est une équation linéaire. La S.G. de l'équation homogène qui lui est associée est

$$y = c \exp \int (-a(x)) dx \quad [1pts]$$

On a $\int (-a(x)) dx = \int -\frac{1}{x} dx = -\ln x = \ln(\frac{1}{x})$ [2pts] et $y = \frac{c}{x}$ [1pts]

Posons $y = \frac{f(x)}{x}$ la S.G. de (E). [1pts] On a $y'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$

1pt et donc

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{x} &= e^x \quad \boxed{2\text{pts}} \\ f(x) &= \int x e^x dx \\ &= x e^x - \int e^x dx \\ &= (x-1)e^x + c \quad \boxed{4\text{pts}}\end{aligned}$$

par suite $y = \frac{(x-1)e^x + c}{x}$ est la S.G de (E). $\boxed{1\text{pts}}$

D'autre part, la solution dont la courbe passe par (1, 1) vérifie $1 = c$ et donc $y = \frac{(x-1)e^x + 1}{x}$ $\boxed{2\text{pts}}$

6. (15pts) Résoudre l'équation différentielle de second ordre suivante

$$y'' + 2y' + y = 2chx \quad (E)$$

Trouver la solution de (E) dont la courbe intégrale passe par le point (0, 1) et dont la tangente en ce point est parallèle à la première bissectrice.

Solution:

L'équation homogène associée à (E) est

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad (H)$$

d'équation caractéristique

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad (C)$$

dont $\lambda = -1$ est une racine double. La S.G. de (H) est $y_G = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$. $\boxed{2\text{pts}}$ Posons

$$y_p = \alpha(x)e^{-x} + \beta(x)xe^{-x} \quad \boxed{1\text{pt}}$$

une S.P. de (E) qui vérifie

$$\begin{cases} \alpha'(x)e^{-x} + \beta'(x)xe^{-x} &= 0 & (1) \\ -\alpha'(x)e^{-x} + \beta'(x)(e^{-x} - xe^{-x}) &= 2chx & (2) \end{cases} \quad \boxed{2\text{pts}}$$

On a (2) + (1) :

$$\begin{aligned}\beta'(x) &= 2chx.e^x \\ \beta'(x) &= e^{2x} + 1 \\ \beta(x) &= -\frac{1}{2}e^{2x} + x \quad \boxed{2pts}\end{aligned}$$

Par (1) :

$$\begin{aligned}\alpha'(x) &= -xe^{2x} - x \\ \alpha(x) &= \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{2}\right)e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 \quad \boxed{2pts}\end{aligned}$$

et la S.G de (E) est $y = y_p + y_G$

$$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} - xchx + \frac{x^2}{2}e^{-x} + \frac{1}{4}e^x \quad \boxed{2pts}$$

D'autre part,

$$y' = (-c_1 + c_2 - \frac{x^2}{2})e^{-x} + chx + xshx + \frac{1}{4}e^x \quad \boxed{2pts}$$

On cherche une solution de (E) qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{4} &= 1 \\ -c_1 + c_2 + 1 + \frac{1}{4} &= 1 \end{cases}$$

soit $c_1 = \frac{3}{4}$ et $c_2 = \frac{1}{2}$

$$y = \left(\frac{3}{4} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x} - xchx + \frac{x^2}{2}e^{-x} + \frac{1}{4}e^x \quad \boxed{2pts}$$

2ième méthode:

Soit $y_p = y_1 + y_2$ avec $y_1 = ae^x$ une S.P. de l'équation

$$y'' + 2y' + y = e^x$$

on trouve $a = \frac{1}{4}$ donc $y_1 = \frac{1}{4}e^x$ et $y_2 = bx^2e^{-x}$ est une S.P de l'équation

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

on trouve $b = \frac{1}{2}$ et $y_2 = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ ainsi

$$y_p = \frac{1}{4}e^x + \frac{x^2}{2}e^{-x}$$

et la S.G est $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{1}{4}e^x + \frac{x^2}{2}e^{-x}$.