

Base de l'analyse réelle (MVA010)  
Final 2019-2020 ⌚ 2h :



Téléphone et Calculatrice programmable sont interdits

Examen proposé par : J.SAAB  
pour les centres de Beyrouth, Baalbek, Nahr Ibrahim.

**Exercice 1 (20 points)** : Soit la fonction réelle

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

- Donner le développement limité de  $f(x)$  au voisinage de  $x_0 = 1$  à l'ordre 3
- Déduire l'équation de la droite tangente à  $(C_f)$  au point  $x_0 = 1$  ainsi que sa position par rapport à  $(C_f)$  la courbe de  $f$ .

**SOLUTION. 1**

1. Soit  $t = x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ .  $\boxed{1\text{pt}}$   $f(x) = \ln(1 + 1 + t) = \ln(2 + t)$   $\boxed{1\text{pt}}$   $= \ln 2(1 + \frac{t}{2}) = \ln 2 + \ln(1 + \frac{t}{2})$

$$\frac{t}{2} \boxed{3\text{pt}} = \ln 2 + \frac{t}{2} - \frac{(t/2)^2}{2} + \frac{(t/2)^3}{3} + t^3 \varepsilon(t) \boxed{6\text{pt}}$$

$$f(x) = \ln 2 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{24} + t^3 \varepsilon(t) \boxed{2\text{pts}}$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2 + \frac{1}{24}(x - 1)^3 + (x - 1)^3 \varepsilon(x) \boxed{2\text{pt}}$$

2.  $(T) : y = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 1)$   $\boxed{3\text{pts}}$ ;  $f(x) - y \simeq -\frac{1}{8}(x - 1)^2 < 0$  alors la courbe est au dessous de la tangente.  $\boxed{2\text{pts}}$

**Exercice 2 (25 points)** On considère la suite  $(u_n)$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}, \quad u_0 = 1$$

- Utiliser la calculatrice pour donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de chacun des termes  $u_1, u_2$  et  $u_3$
- Montrer par récurrence sur  $n$  que  $0 < u_n < 2$  pour tout  $n \geq 0$
- Montrer que  $-x^2 + x + 2 \geq 0$  pour tout  $x \in [0, 2]$
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$  en déduire que  $|u_n - 2| \leq \frac{1}{2^n}$
- Déduire la nature de  $(u_n)$  et donner sa limite
- Montrer que  $(u_n)$  est croissante en déduire sa nature et retrouver sa limite

 SOLUTION. 2

1.  $u_1 = \frac{5}{3} \simeq 1.666$ ;  $u_2 = \frac{21}{11} \simeq 1.909$ ;  $u_3 = \frac{85}{43} \simeq 1.976$  [3pts]
2. On a  $0 < u_0 < 2$ , [1pts] supposons par récurrence que ceci est vrai jusqu'à l'ordre  $n$  c.à.d  $0 < u_n < 2$  et montrons le pour  $n + 1$ . En effet, on a  $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2} > 0$  [1pt] et d'un autre coté

$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{u_n + 2} < 0 \text{ car } u_n < 2. [2pts]$$

D'où  $0 < u_{n+1} < 2$  et par suite  $0 < u_n < 2$  pour tout  $n \geq 0$ . [1pt]

2<sup>ème</sup> méthode :  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$  [1pt] qui est une fonction strictement croissante puisque  $f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$ . [1pt] On a  $0 < u_0 < 2$ , supposons par récurrence que  $0 < u_n < 2$  alors  $f(0) < f(u_n) < f(2)$  [2pt] c'est à dire :

$$1 < u_{n+1} < 2$$

ainsi  $0 < u_{n+1} < 2$  et la propriété est vraie pour  $n + 1$  donc elle est vraie pour tout  $n : 0 < u_n < 2, \forall n \geq 0$ . [1pt]

3.  $\Delta = 1 + 8 = 9$ , les racines du trinôme sont :  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -1$  [1pt] ainsi  $-x^2 + x + 2 \geq 0, \forall x \in [-1, 2]$  donc  $-x^2 + x + 2 \geq 0, \forall x \in [0, 2]$ . [1pt]

4.  $|u_{n+1} - 2| = \left| \frac{u_n - 2}{u_n + 2} \right|$ . Comme  $u_n > 0$  alors  $u_n + 2 > 2$  et  $\frac{1}{|u_n + 2|} < \frac{1}{2}$  [1pt] et par suite  $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$  [2pt] pour tout  $n \geq 0$ .

$$\begin{aligned} |u_1 - 2| &\leq \frac{1}{2}|u_0 - 2| = \frac{1}{2} \\ |u_2 - 2| &\leq \frac{1}{2}|u_1 - 2| \\ &\vdots \\ |u_n - 2| &\leq \frac{1}{2^n}|u_0 - 2| \end{aligned}$$

et par multiplication membre à membre

$$|u_n - 2| \leq \frac{1}{2^n} [3pts]$$

5.  $0 \leq |u_n - 2| \leq \frac{1}{2^n}$  et par passage à la limite lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on a  $|u_n - 2| \rightarrow 0$  et par suite  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$  et la suite  $(u_n)$  est une suite convergente, elle converge vers 2. [2pts]

6.  $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2} > 0$  car  $0 < u_n < 2$  et  $-x^2 + x + 2 \geq 0$  pour tout  $x \in [0, 2]$  [2pts]

La suite  $(u_n)$  est croissante et comme elle est majorée par 2 donc elle est convergente [2pts], soit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ . Aussi,  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$  est continue  $\forall x \in ]0, 2[$  donc  $l = f(l)$  [1pt] c'est à dire  $3l + 2 = l^2 + 2l$  donc  $l = -1$  ou  $l = 2$  comme  $u_n > 0$  donc  $l = 2$ . [2pts]

2<sup>ème</sup> méthode :  $u_1 = \frac{5}{3} > u_0 = 1$ , supposons par récurrence que  $u_n > u_{n-1}$  [2pts], comme  $f$  est strictement croissante alors  $f(u_n) > f(u_{n-1})$  c'est à dire  $u_{n+1} > u_n$  et  $(u_n)$  est croissante. (La suite de la solution est la même). [2pts]



**Exercice 3 (20 points)** 1. Calculer les intégrales

$$I = \int \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{et} \quad J = \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx.$$

2. Dédire les intégrales

$$K = \int \frac{x-2}{x+x^3} dx \quad \text{et} \quad L = \int \frac{e^t-2}{e^{2t}+1} dt.$$

 **SOLUTION. 3**

1.  $I = \arctan x + c$  [2pts] Soit  $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$  [2pts]

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$$bi+c = \frac{1}{i} = -i \text{ donc } c=0, b=-1$$

[2pts+2pts=4pts]

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \text{ et } J = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$
 [4pts]

2.  $K = \int \frac{dx}{1+x^2} - 2 \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = I - 2J = \arctan x - 2 \ln x + \ln(1+x^2) + c$  [3pts] D'autre part,

$$L = \int \frac{e^t-2}{e^{2t}+1} dt. \text{ Soit } x = e^t \text{ donc } dx = e^t dt = x dt$$
 [2pts] et

$$L = \int \frac{x-2}{x^2+1} \frac{dx}{x} = K(x) = \arctan e^t - 2t + \ln(1+e^{2t}) + c$$
 [3pts]

**Exercice 4 (15 points)** Soient les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$$

Calculer  $I+J$  et  $I-J$  en déduire  $I$  et  $J$ .

 **SOLUTION. 4**

On a  $I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$  [3pts] et  $I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$  par parties  $\left[ x \left( \frac{1}{2} \sin 2x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$  [6pts]  $= \left[ \frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$  [2pts].

$$\begin{cases} I+J = \frac{\pi^2}{8} \\ I-J = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad [1pt]$$

$$I = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \right); \quad J = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right)$$
 [3pts]

**Exercice 5 (20 points)** On donne l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{x}y = \sqrt{x} \cdot (y)^{3/2} \quad (1)$$

1. Utiliser le changement de variable  $z(x) = \frac{1}{\sqrt{y(x)}}$  ou  $(y(x) = \frac{1}{z(x)^2})$ , pour montrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation linéaire en  $z(x)$  :

$$z'(x) - \frac{1}{2x}z(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2}. \quad (2)$$

2. Résoudre l'équation (2) et déduire la solution générale de (1)

 **SOLUTION. 5**

1.  $y(x) = \frac{1}{z(x)^2} = z(x)^{-2}$  et  $y'(x) = -2z(x)^{-3} \cdot z'(x)$ . 3pts L'équation (1) est équivalente à

$$-2z(x)^{-3} \cdot z'(x) + \frac{1}{x} \cdot z(x)^{-2} = \sqrt{x} \cdot z(x)^{-3}$$

soit  $z'(x) - \frac{1}{2x}z(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2}$ . 2pts

2. L'ESSM associée à (2) est  $z'(x) - \frac{1}{2x}z(x) = 0$  dont la S.G. est  $z(x) = c \exp \int \frac{1}{2x} dx = c\sqrt{x}$ . 4pts Soit  $z(x) = f(x) \cdot \sqrt{x}$  la S.G. de (2). 2pts On a

$$\begin{aligned} f'(x)\sqrt{x} &= -\frac{\sqrt{x}}{2} \\ f(x) &= -\frac{1}{2} \int dx \\ &= -\frac{1}{2}x + c \end{aligned} \quad \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4pts$$

La S.G. de (2) est  $z(x) = (-\frac{1}{2}x + c)\sqrt{x}$  3pts donc la S.G. de (1) est  $y = \frac{1}{(-\frac{1}{2}x + c)^2 \cdot x}$ . 2pts

