Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date:Novembre-Durée:1h30
Partiel
2017-2018

Sujet coordonné par: J.Saab
Proposé pour les centres d'ensei
Beyrouth-Baakline-Baalbek-Gha
Tripoli-Bickfaya
Langue de l'éxamen: Français

Est autorisé:
Calculatrice Non Programmable

Partiel
Base de l'analyse Mathématique - MVA010

1. ($15\,pts$) Soit la fonction réelle

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(2+\sin x) - \ln(1+\cos x)}{shx} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) L'objectif étant de trouver un D.L de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2; Jusqu'à quel ordre faudrait - il dévélopper chacune des composantes de $f(x)$? Justifier!

(b) Donner le D.L de $\ln(2+\sin x)$ et $\ln(1+\cos x)$ en 0 jusqu'à l'ordre 3

(c) Déduire le D.L de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2

(d) En déduire, d'abord que f est continue en 0 et ensuite, qu'elle est dérivable en 0

(e) Déduire l'équation de la tangente en 0 à la courbe de f ainsi que sa position relativement à la courbe.

Solution:

(a) Le premier terme du DL de shx est x de degré $k = 1$ et celui du numérateur est $\dfrac{x}{2}$ de degré $l = 1 \geq k$ donc f admet un DL dans un voisinage de 0 et pour avoir un DL à l'ordre $n = 2$ il faut dévélopper chaque composante de f à l'ordre $n + k = 2 + 1 = 3$ $\quad (1 + 1 + 1 = 3pts)$

(b) (3pts) $\ln(2+\sin x) = \ln(2+x-\dfrac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)) = \ln 2[1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^3}{12}+x^3\varepsilon(x)] = \ln 2+\ln(1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^3}{12}+x^3\varepsilon(x)) = \ln 2+(\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^3}{12})-\frac{1}{2}(\dfrac{x^2}{4})+\frac{1}{3}(\dfrac{x^3}{8})+x^3\varepsilon(x)$

$$\ln(2+\sin x) = \ln 2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{24}+x^3\varepsilon(x)$$

(3pts) $\ln(1+\cos x) = \ln(1+1-\dfrac{x^2}{2}+x^3\varepsilon(x)) = \ln[2(1-\dfrac{x^2}{4}+x^3\varepsilon(x)] = \ln 2+\ln(1-\dfrac{x^2}{4}+x^3\varepsilon(x)) = -\ln 2-\dfrac{x^2}{4}+x^3\varepsilon(x)$

(c) (3pts) $f(x) = \dfrac{\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{x^3}{24}+x^3\varepsilon(x)}{x+\dfrac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)} = \dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{8}-\dfrac{x^2}{24}+x^2\varepsilon(x)}{1+\dfrac{x^2}{6}+x^2\varepsilon(x)}$

$$f(x) = \frac{1}{2}+\frac{x}{8}-\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon(x)$$

(d) (1+1=2pts) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$ donc f est continue en 0. D'autre part

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}(\frac{1}{8}+\varepsilon(x)) = \frac{1}{8}$$

donc f est dérivable et $f'(0) = \frac{1}{8}$.

(e) (T): $y = \frac{1}{2}+\dfrac{x}{8}$ et $f(x)-y \simeq -\frac{x^2}{8} \leq 0$ et donc la courbe est au dessous de la tangente. (1pt)

2. (10pts) On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} & \text{si} \quad x > 0 \\ \dfrac{-3x+1}{x-1} & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en déduire qu'elle vérifie les condition du théorème des accroissements finis sur $[-1,1]$

(b) Appliquer le T.A.F. à la fonction $f(x)$ sur $[-1,1]$ et donner les valeurs possibles de $c \in]-1,1[$ qui vérifie $f'(c) = \dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$

Solution

(a) (0.5+0.5=1pts) Si $x > 0$ alors $x \neq -1$ et $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ est dérivable; Si $x < 0$ alors $x \neq 1$ et donc $f(x) = \dfrac{-3x+1}{x-1}$ est dérivable.Il reste à verifier la derivabilité au point 0: (2pts+2pts+1pt=5pts)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-3x+1}{x-1}+1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{x(x-1)} = 2\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x-1}{x+1}+1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(x+1)} = 2\end{aligned}$$

parsuite $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 2$ et f est dérivable en 0 et $f^{'}(0) = 2$ et parsuite f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (

(b) (1pt) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et donc elle est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$; par le T.A.F $\exists c \in]-1, 1[$ tel que

$$f^{'}(c) = \frac{f(1)-f(-1)}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$

$f^{'}(c) = 1$ donc $c \neq 0$ ainsi $c < 0$ ou $c > 0$:
Si $c > 0$ alors $f^{'}(c) = \dfrac{2}{(c+1)^2} = 1$ et donc $c = \sqrt{2}-1$ (1.5pt)
Si $c < 0$ alors $f^{'}(c) = \dfrac{2}{(c-1)^2} = 1$ et $c = -\sqrt{2}+1$ (1.5pt)

3. (15pts)On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 & > & 0 \\ u_{n+1} & = & \frac{1}{2}(u_n + \dfrac{10}{u_n}), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

On propose de montrer que cette suite converge vers $\sqrt{10}$ et ensuite donner une valeur approchée de $\sqrt{10}$.

(a) Montrer que
$$(u_{n+1}^2 - 10) = \frac{(u_n^2 - 10)^2}{4u_n^2}$$

(b) Montrer que quelque soit $n \geq 1,\ u_n \geq \sqrt{10}$ en déduire que (u_n) est décroissante

(c) Déduire que (u_n) converge vers $\sqrt{10}$

(d) Donner une valeur approchée de $\sqrt{10}$ qui diffère de votre calculatrice de 10^{-3}, en supposant que $u_0 = 4$.

Solution

(a) (4pts) $(u_{n+1}^2 - 10) = \frac{1}{4}(u_n^2 + 20 + \dfrac{100}{u_n^2}) - 10 = \dfrac{u_n^2}{4} + \dfrac{25}{u_n^2} - 5 = \dfrac{u_n^4 - 20u_n^2 + 100}{4u_n^2} = \dfrac{(u_n^2 - 10)^2}{4u_n^2}$

(b) (4pts) Pour tout $n \geq 0$ on a $(u_{n+1}^2 - 10) \geq 0$ d'après a) et il est évident que $u_n > 0$ alors $u_{n+1} \geq \sqrt{10}$ pour tout $n \geq 0$. D'autre part
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{10}{u_n^2}) \leq 1$$
car $\dfrac{10}{u_n^2} \leq 1$ et parsuite (u_n) est décroissante

(c) (3pts) (u_n) décroissante et minorée par $\sqrt{10}$ donc elle est convergente, soit $l = \lim u_n$. On doit avoir
$$l = \frac{1}{2}(l + \frac{10}{l})$$
c'est à dire $l^2 = 10$ et donc $l = \sqrt{10}$ car la suite est à termes positifs.

(d) (4pts) $u_0 = 4;\ u_1 = \frac{1}{2}(4 + \frac{5}{2}) = 3.25;\ u_2 = \frac{1}{2}(3.25 + \frac{10}{3.25}) = 3.1634;\ u_3 = \frac{1}{2}(3.1634 + \frac{10}{3.1634}) = 3.16227$. On pose $\sqrt{10} \simeq 3.16227$