

Base de l'analyse réelle (MVA010)
Final 2018-2019 ⌚ 3h :



Téléphone et Calculatrice programmable sont interdits

Examen proposé par : J.SAAB
pour les centres de Beyrouth, Baalbek, Nahr Ibrahim.

Exercice 1 (15 points) On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}{|-x^2 + 4x - 12|}$$

1. Exprimer $f(x)$ sans la valeur absolue
2. Déterminer le domaine de définition de f .
3. Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe de f au point $x = 0$.

SOLUTION. 1

1. $\Delta' = 4 - 12 = -8 < 0$ donc $-x^2 + 4x - 12 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}{x^2 - 4x + 12}$ 5 pts
2. Il faut que $x^2 - 5x + 4 \geq 0$: $x_1 = 1, x_2 = 4$ et donc $D =]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$ 3 pts
3. $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^2 - 5x + 4}(x^2 - 4x + 12)^2} (2x^3 - 15x^2 + 12x + 28)$; $f(0) = \frac{1}{6}$; $f'(0) = \frac{7}{144}$; 3+1+1=5 pts L'équation de la tangente est :

$$y = f'(0)x + f(0) \quad \boxed{1+1=2 \text{ pts}}$$

$$y = \frac{7}{144}x + \frac{1}{6}$$

Exercice 2 (20 points) : On considère la fonction $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$ définie sur $] -1, +\infty[\setminus \{0\}$

1. Donner le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 3.
2. Dédurre que f est prolongeable par continuité en 0 et donner la fonction $g(x)$, son prolongement par continuité en 0
3. Vérifier que $g(x)$ est dérivable en 0 et donner $g'(0)$, la dérivée de $g(x)$ en 0
4. Proposer, d'après ce qui précède, une valeur approchée de $f(0, 1)$ et comparer cette valeur à la valeur trouvée par votre calculatrice.

SOLUTION. 2

$$1. f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon(x)}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^3 \varepsilon(x)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + x^3 \varepsilon(x)} \quad \boxed{2 \text{ pts}} \text{ donc pour } t =$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) (1 - t + t^2 - t^3) + t^3 \varepsilon(x)$$

$$= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}\right) - \left(\frac{x^3}{8}\right)\right) + x^3 \varepsilon(x) \quad \boxed{4 \text{ pts}}$$

$$= 1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + x^3 \varepsilon(x) \quad \boxed{2 \text{ pts}}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0 $\boxed{1 \text{ pts}}$ et son prolongement est :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} & \text{si } x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \boxed{2 \text{ pts}}$$

$$3. g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + x\varepsilon(x)}{x} = -1 \quad \boxed{5 \text{ pts}}$$

4. On propose la valeur $f(0.1) \simeq 1 - 0.1 + \frac{2}{3} \times 0.01 - \frac{11}{24} \times 0.001 \simeq 0.90621$ $\boxed{3 \text{ pts}}$ et par la calculatrice $\frac{\ln(1.1)}{e^{0.1} - 1} = 0.90624$ on a une précision à l'ordre de 3.10^{-4} . $\boxed{1 \text{ pt}}$

Exercice 3 (25 points) : Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

1. Utiliser le théorème de la moyenne pour montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$

2. Calculer $I_n + I_{n+1}$

3. Soit la série $S = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$:

(a) Vérifier que cette série est semi convergente (Convergente mais elle n'est pas absolument convergente)

(b) Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série S . Exprimer, d'après la partie 2, la somme S_n en termes de I_k . En déduire la valeur de la série S .

SOLUTION. 3

1. $f(x) = x^n$ est continue sur $[0, 1]$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$ est continue et positive sur $[0, 1]$ [2 pts]
donc par le théorème de la moyenne il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$I_n = f(c) \int_0^1 g(x) dx = (\ln 2) \cdot c^n \quad [4 \text{ pts}]$$

comme $0 < c < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ [1 pts]

2. $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$ [5 pts]

3. $S = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$:

(a) S est alternée et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ donc S est convergente, [3 pts] par contre $S =$

$$\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ est divergente car } \alpha = 1 \quad [3 \text{ pts}]$$

(b) $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ [1 pt] donc

$$\begin{aligned} S_n &= (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) + \dots + \\ &\quad (-1)^n (I_{n-2} + I_{n-1}) + (-1)^{n+1} (I_{n-1} + I_n) \quad [3 \text{ pts}] \\ &= I_0 - I_n \text{ si } n \text{ est pair} \\ &= I_0 + I_n \text{ si } n \text{ est impair} \end{aligned}$$

D'où $S_n = \ln 2 \pm I_n$ [2 pts] et $S = \lim S_n = \ln 2$ [1 pt]

Exercice 4 (20 points) Calculer :

- $\int \frac{x+3}{-x^2+3x-2} dx$
- $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

SOLUTION. 4

1. $\frac{x+3}{-x^2+3x-2} = \frac{x+3}{-(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$, [2 pts] par identification on trouve
 $a = 4$ et $b = -5$. [3 pts] D'où

$$I = 4 \ln(x-1) - 5 \ln(x-2) \quad [5 \text{ pts}]$$

2. Intégration par parties : $u = \ln x$ et $du = \frac{dx}{x}$; $dv = \frac{1}{x^2} dx$ et $v = -\frac{1}{x}$. [5 pts] D'où

$$I = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x} = -\frac{1}{x} (\ln x + 1) \quad [5 \text{ pts}]$$

Exercice 5 (20 points) Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Calculer la somme des entiers naturels qui sont divisibles par 13 et inférieurs à 10000.
2. Calculer la somme $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{7}{10}\right)^n$
3. Si (u_n) est une suite telle que

$$\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}, n \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 1
- (b) En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

 **SOLUTION. 5**

1. $S = \sum_{n=1}^{769} 13n = 13 \times \frac{769 \times 770}{2} = 3848\ 845$ 3 pts

2. $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{7}{10}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q}$ avec $q = \frac{7}{10} < 1$ et donc $S = \frac{1}{1 - \frac{7}{10}} = \frac{10}{3}$ 5 pts

3. On a $u_0 > 1$ et donc par récurrence si $u_n > 1$ alors $u_{n+1} > \sqrt{2 - 1} = 1$ et par suite $u_n > 1 \forall n$. 3 pts D'autre part

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} = -\frac{(u_n - 1)^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} < 0$$
 6 pts

Par suite (u_n) est décroissante et minorée par 1

4. (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers une limite l 1 pts telle que $l = \sqrt{2l - 1}$ c-à-d $l^2 - 2l + 1 = 0$ et donc $l = 1$ 2 pts