1. On donne une suite géométrique $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_2 = 4$ et $u_5 = 32$. Donner la raison et le terme général u_n de (u_n) en déduire le premier terme de la suite. La suite (u_n) est elle convergente. Trouver $u_4 + u_5 + \cdots + u_{12}$.

2. Refaire le même exercice 1 en supposant que (u_n) est une suite arithmétique.

3. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ (1+x)^n &\geq 1 + nx \quad \forall x > 0 \end{aligned}$$

Déduire de la dernière inégalité que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad q > 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < q < 1 \end{cases}$

4. Vérifer la monotonie de chacune des suites suivantes:
   a) $u_n = n - (\cos 1 + \cos \frac{1}{2} + \cdots + \cos \frac{1}{n})$
   b) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$
   c) $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$

5. Considérons la suite $(u_n)_n$ donnée par:

$$0 < u_0 < 1 \ \ et \ \ u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

Démontrer que $(u_n)_n$ converge vers 0

6. Considérons la suite $(u_n)_n$ donnée par

$$u_0 = 2 \ \ et \ \ 2u_n u_{n+1} = u_n^2 + 2$$

   a) Etudier les signes de $u_{n+1} - \sqrt{2}$ et de $u_{n+1} - u_n$
   b) Déduire que $(u_n)_n$ est convergente. Trouver sa limite

7. Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_0 > 2 \ \ et \ \ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + u_n} + 1$$

   a) Démontrer que $u_n \geq 0, \ \ \forall n \in IN$
   b) Démontrer que (u_n) est bornée par 2
   c) Démontrer que (u_n) est convergente et trouver sa limite
   d) Soit (v_n) une suite définie par

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}, \ \ n \geq 0$$

   i) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et trouver sa raison
   ii) Etudier la nature de (v_n) et retrouver le résultat de la $3^{ième}$ question

8. Soient $a, \ b \in IR_+$. On définit les deux suites (a_n) et (b_n) par

$$a_0 = a, \ b_0 = b \ \text{ et } \ \forall n \geq 0 \ \ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \ \ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

9. Former la $n^{ième}$ somme partielle de chacune des séries suivantes, en déduire la nature des séries:

   (a) $\sum \frac{1}{4^{n-1}}$, $\sum 3^n$