Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date:Décembre 2012
Durée:2h00
Partiel
2012-2013

Sujet coordonné par: J.Saab
Proposé pour les centres d'enseignement de:
Beyrouth–Baalbek
Tripoli-Bickfaya
Langue de l'éxamen: Français

Est autorisé:
Calculatrice Non Programmable

Examen de Partiel
Base de l'analyse Mathématique - MVA010

1. $(25pts)$ On considère les suites (u_n) et (w_n) :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + w_n), \quad w_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2w_n), \quad \text{avec } 0 < u_1 < w_1$$

   (a) Montrer que pour tout $n \geq 1,\ 0 < u_n < w_n$
   (b) Montrer que (u_n) et (w_n) sont deux suites adjacentes
   (c) En faisant appel a $(u_n + w_n)$, trouver la limite commune de (u_n) et (w_n)

Solution:

a)La propriètè est vraie pour $n = 1$. Supposons par récurrence que $0 < u_n < w_n$ et montrons que $0 < u_{n+1} < w_{n+1}$?

en effet, il est claire que $u_{n+1} > 0$ et $w_{n+1} > 0$. D'autre part, $w_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(w_n - u_n) > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence.Parsuite, $0 << u_n < w_n$.

b)$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{3}(u_n - w_n) < 0$ donc $(w_n) \searrow$. Aussi $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(w_n - u_n) > 0$ et $(u_n) \nearrow$. Comme (u_n) est croissante et majorée par w_1 donc elle est convergente. Soit $l = \lim u_n$. De même (w_n) est décroissante et minorée par u_1 donc elle est convergente. Soit $l' = \lim w_n$. Montrons que $l = l'$. On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + w_n)$$

et par passage à la limie: $l = \frac{2}{3}l + \frac{1}{3}l'$ et donc $l = l'$ et parsuite les deux suites sont adjacentes.

c)$u_{n+1} + w_{n+1} = u_n + w_n$ et donc la suite $X_n = u_n + w_n$ est une suite constante. Soit $X_n = X_1 = u_1 + w_1$ et par passage à la limite on trouve $2l = u_1 + w_1$ c'est à dire $l = \frac{1}{2}(u_1 + w_1)$

---

2. $(10\,pts)$ Soit $c \in \mathbb{R}$, et soit la fonction

$$f(x) = x^3 + 2e^x + c$$

Pour quelles valeurs de c la fonction $f(x)$ admet-elle des racines dans l'intervalle $]0,1[$

Solution: la fonction f est continue sur $[0,1]$, on doit avoir $f(0).f(1) = (2+c)(1+2e+c) < 0$ c'est à dire $c \in]-2e-1,-2[$

---

3. $(20pts)$ Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \le 0 \\ 1-(\sin\frac{\pi x}{2})^3 & si \quad x \in [0,1] \\ 0 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$$

(a) Montrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée

(b) Montrer que la dérivée de f, c'est à dire f', est continue sur $\mathbb{R}$

Solution:

a) Le problème se pose en 0 et en 1 :

En 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-1}{x} = 0$. Aussi $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(\sin\frac{\pi x}{2})^3-1}{x} = -\lim\limits_{x\to 0} (\sin\frac{\pi x}{2})^2 . \dfrac{(\sin\frac{\pi x}{2})}{\frac{\pi x}{2}} \frac{\pi}{2} = 0 \times 1 \times \frac{\pi}{2} = 0$. Ainsi

$$f_g'(0) = f_d'(0) = 0$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

En 1 : On a

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1-(\sin\frac{\pi x}{2})^3-1}{x-1} \overset{R.H.}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-3(\sin\frac{\pi x}{2})^2 \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{1} = 0$$

Aussi

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{0-0}{x-1} = 0$$

ainsi $f_g'(1) = f_d'(1) = 0$ et f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

b) On a

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ -3(\sin\frac{\pi x}{2})^2 \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Le problème de continuité se pose en 0 et en 1.

En 0 : On a

$$\lim_{x\to 0^+} f^{'}(x) = -3\lim_{x\to 0}(\sin\frac{\pi x}{2})^2\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2} = 0 = \lim_{x\to 0^-} f^{'}(x) = f^{'}(0)$$

et $f^{'}$ est continue en 0.

En 1 : On a

$$\lim_{x\to 1^-} f^{'}(x) = -3\lim_{x\to 1}(\sin\frac{\pi x}{2})^2\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2} = 0 = \lim_{x\to 1^+} f^{'}(x) = f^{'}(1)$$

et $f^{'}$ est continue en 1.

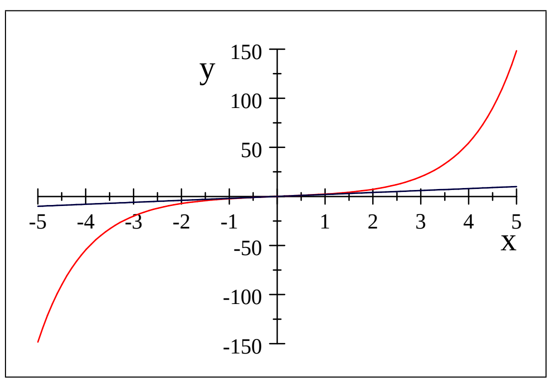
---

4. $(15\,pts)$ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}}| \geq |x|$$

en déduire que $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \ln x$ pour $x \geq 1$

Solution: Soit $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}} = 2shx$. La tangente en 0 à f est $y = 2x$ qui coupe la courbe de f en $o(0,0)$ vu que ce point est un point d'inflèxion de f.



Pour $x \geq 0$ la courbe est au dessus de la tagente et $f(x) \geq 2x \geq x$

Pour $x \leq 0$ la courbe est au dessous de la tangente et $f(x) \leq 2x \leq 0$ donc $-f(x) \geq -2x$ c'est à dire $|f(x)| \geq 2|x| \geq |x|$ et parsuite

$$\left| e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}} \right| \geq |x|$$

D'autre part, posons $x = \ln t, \quad t \geq 1$ on obtient

$$\left|\exp(\frac{\ln t}{2}) - \exp(-\frac{\ln t}{2})\right| \geq |\ln t|$$

c'est à dire

$$|\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}| \geq |\ln t|$$

et comme $t \geq 1$ on aura $\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \geq \ln t$

---

5. $(30pts)$

   (a) Donner le devéloppement limité à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ de

   $$\frac{x}{x-1}$$

   (b) 1. Donner le devéloppement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

   $$\arctan t$$

   2. Déduire le devéloppement limité de $\arctan \frac{1}{x-1}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ à l'ordre 3

   (c) Étudier les branches infinies de la courbe de la fonction

   $$x^2 \arctan \frac{1}{x-1}$$

   (d) Déduire $\lim_{x\to\infty}(x \arctan \frac{1}{x-1})$

Solution:

a)$f(x) = \dfrac{x}{x(1-\frac{1}{x})} = \dfrac{1}{1-t}$ avec $t = \dfrac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + t + t^2 + t^3 + t^3\varepsilon(t) \\ &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(x) \end{aligned}$$

b-1) Soit $g(x) = \arctan x$. On a $g^{'}(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^2\varepsilon(x)$ et donc

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \text{ vu que } g(0) = 0$$

b-2)$\arctan \frac{1}{x-1} = \arctan \frac{f(x)}{x} = \arctan(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(x)) = (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) - \frac{1}{3}(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})^3 + \frac{1}{x^3}\varepsilon$ et donc

$$\begin{aligned} \arctan \frac{1}{x-1} &= (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) - \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon \end{aligned}$$

c) $x^2 \arctan \frac{1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{3x} + \frac{1}{x}\varepsilon$ et donc $y = x + 1$ est une asymptote oblique

d) $\lim x \arctan \frac{1}{x-1} = \lim(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon) = 1$