

Est autorisé:
 Calculatrice Non Programmable

Final
Base de l'analyse Mathématique - MVA010

1. 10pts: Soit la fonction réelle

$$f(x) = e^{\frac{x^2-x+1}{x^3+x^2}}$$

(a) 2pts) Montrer, qu'en posant, $t = \frac{1}{x}$, on peut exprimer $\frac{x^2-x+1}{x^3+x^2}$ sous la forme: $t \cdot \frac{1-t+t^2}{1+t}$

$$\text{Solution: } \frac{x^2-x+1}{x^3+x^2} = \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^3(1+\frac{1}{x})} = \frac{(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x(1+\frac{1}{x})} = t \cdot \frac{1-t+t^2}{1+t}$$

(b) 4pts) Donner le développement limité de $t \cdot \frac{1-t+t^2}{1+t}$ à l'ordre 3 en 0, en déduire le développement limité de $\frac{x^2-x+1}{x^3+x^2}$ à l'ordre 3 en l'infini

$$\text{Solution: } t \cdot \frac{1-t+t^2}{1+t} = t(1-t+t^2)(1-t+t^2-t^3+t^3\varepsilon(t)) = t(1-t+t^2-t+t^2+t^2+t^2\varepsilon(t)) = t-2t^2+3t^3+t^3\varepsilon(t)$$

(c) 4pts) Déduire le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3 en l'infini

$$f(x) = e^{t-2t^2+3t^3+t^3\varepsilon(t)} = 1 + (t-2t^2+3t^3) + \frac{1}{2}(t-2t^2+3t^3)^2 + \frac{1}{6}(t-2t^2+3t^3)^3 + t^3\varepsilon(t) = 1 + (t-2t^2+3t^3) + \frac{1}{2}(t^2-4t^3) + \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t) = 1 + t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{7}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{7}{6x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(x)$$

2. 20pts) Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0, f(1) = 1$ et

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) < x$$

(a) On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n \geq 0}$

$$\begin{cases} u_0 \in [0, 1] \\ \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Montre que (u_n) est décroissante en déduire qu'elle est convergente et donner sa limite

Solution: 10pts=4 pr la décroissance+4 pr la majoration+2 pr la limite) On a $u_0 \in [0, 1]$, supposons que $u_n \in [0, 1]$ alors comme $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, on a $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1]$. D'autre part, pour tout $x \in [0, 1]$ on a $f(x) \leq x$ donc $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$

et (u_n) est décroissante, comme elle est minorée par 0 alors elle est convergente vers une certaine limite l qui doit vérifier $l = f(l)$. Or, les seules valeurs qui vérifient $l = f(l)$ sont 0 et 1 et vu que (u_n) est strictement décroissante dans $[0, 1]$ alors elle décroît vers 0 et $l = 0$

(b) On définit par récurrence une suite $(w_n)_{n \geq 0}$

$$\begin{cases} w_0 = 1/2 \\ \forall n \geq 0 \quad w_{n+1} = \frac{w_n}{2 - \sqrt{w_n}} \end{cases}$$

Utiliser la fonction $f(x) = \frac{x}{2 - \sqrt{x}}$, pour montrer, d'après la partie a) que la suite (w_n) est convergente et donner sa limite

Solution: 10pts=5pts pr mtq $f \in [0, 1]$ + 5pts pr la déduction) On a f est continue sur $[0, 1]$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. D'autre part, si $0 < x < 1$ alors $0 < \sqrt{x} < 1$ et $-1 < -\sqrt{x} < 0$. Aussi $1 < 2 - \sqrt{x} < 2$ donc $\frac{1}{2} < \frac{1}{2 - \sqrt{x}} < 1$, par suite $f(x) \in [0, 1]$. La suite (w_n) vérifie les conditions de la partie a) donc (w_n) est convergente et elle converge vers 0

3. 20pts: On considère les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$$

(a) 10pts) Utiliser le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ pour calculer $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$, en déduire la valeur de I

Solution: $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{-2}{1+t} + c$. D'autre part, $I = \left. \frac{-2}{1+t} \right|_0^1 = 1$

(b) 10pts) Etablir une équation linéaire entre I et J pour déduire la valeur de J

Solution: $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ et donc $J = \frac{\pi}{2} - 1$

4. 30pts) Résoudre les équations différentielles suivantes

(a) (B) : $xy' + y - xy^3 = 0$

Solution: 10pts=4pts passage de Bernoulli à la linéaire + 2pts solution de l'éq sans 2nd membre + 4pts solution de la linéaire) $y' + \frac{1}{x}y = y^3$ et donc $y^{-3}y' + \frac{1}{x}y^{-2} = 1$ (B). Posons, $z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y'$ et donc (B) est équivalente à l'équation:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}z' + \frac{1}{x}z &= 1 \\ z' - \frac{2}{x}z &= -2 \quad (L) \end{aligned}$$

la solution générale de l'équation sans second membre associée à (L) est $z = k \exp\left(\int \frac{2}{x} dx\right) = kx^2, k \in \mathbb{R}$. On suppose que $z = f(x)x^2$ est la S.G de (L) alors on a

$$\begin{aligned} f'(x)x^2 &= -2 \\ f(x) &= -2 \int \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{x} + c \end{aligned}$$

et la S.G. de (L) est $z = 2x + cx^2, c \in \mathbb{R}$ et par suite la S.G de (B) est $y^2 = \frac{1}{2x + cx^2}$

(b) (L) : $y'' + y = \frac{\cos x}{\sin x}, x \in]0, \pi[$ avec $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$

Solution: 5pts pr la S.G y_g + 5pts pr le système (1) et (2) + 5pts pr le calcul de g et 3pts pr f et 2 pts pour la conclusion) Soit l'ESM: $y'' + y = 0$ d'équation caractéristique $\lambda^2 + 1 = 0$ (C) où $\lambda = i$ est une racine. La S.G de l'ESM est

$$y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Posons $y_p = f(x) \cos x + g(x) \sin x$ une S.P de (L) telle que

$$\begin{cases} f'(x) \cos x + g'(x) \sin x &= 0 & (1) \\ -f'(x) \sin x + g'(x) \cos x &= \frac{\cos x}{\sin x} & (2) \end{cases}$$

en resolvant le système $g'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$ et $g(x) = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$. Posons $t = \cos x$ et $dt = -\sin x dx$
et $g(x) = \int \frac{-t^2}{1-t^2} dt = \int (1 - \frac{1}{1-t^2}) dt = t - \arg \tanh t$. D'autre part

$$f'(x) = -\cos x \text{ et donc } f(x) = -\sin x$$

Finalement $y_p = -\sin x \cos x + (\cos x - \arg \tanh \cos x) \sin x$ et la S.G de (L) est $y = y_g + y_p$
