Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date:Septembre-Durée:1h30
Partiel
2015-2016

Sujet coordonné par: J.Saab
Proposé pour les centres d'enseignement de:
Beyrouth-Baalbek-Ghazza-
Tripoli-Bickfaya
Langue de l'éxamen: Français

Est autorisé:
Calculatrice Non Programmable

Partiel
Base de l'analyse Mathématique - MVA010

1. ($35\,pts$)
Soit la fonction réelle
$$f(x) = \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$
   (a) Donner le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2
   (b) Déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et donner la fonction $g(x)$, prolongement de $f(x)$ par continuité en 0.
   (c) Quelle est l'équation de la tangente en 0 à la courbe de g ainsi que sa position par rapport à cette courbe

---

Solution:
a)20pts=(4pts si on devine l'ordre du développement)+(6pts pr cos à l'ordre 6)+(6pts pour $\sqrt{}$ à l'ordre 6)+(4pts forme finale)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^4}[(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{6!})-(1+\frac{1}{2}(-x^2)-\frac{1}{8}(-x^2)^2+\frac{1}{16}(-x^2)^3+x^6\varepsilon(x)] \\ &= \frac{1}{x^4}[-\frac{1}{12}x^4+\frac{11}{180}x^6+x^6\varepsilon(x)] = -\frac{1}{12}+\frac{11}{180}x^2+x^2\varepsilon(x) \end{aligned}$$

b)(8pts=4pts+4pts) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{12}$ finie donc f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -\frac{1}{12} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

c) (7pts=3pts+4pts) $(T): y = -\frac{1}{12}$ est la tangente à la courbe de g en 0; $g(x) - y \simeq \frac{11}{180}x^2 > 0$ donc la courbe est au dessus de la tangente

---

2. (40pts) Soi tf la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$
   (a) Etudier les variations de f
   (b) Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$$
      1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_u < u_{n+1} < 1$
      2. En déduire que la suite est convergente

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1} - 1| < \frac{1}{2}|u_n - 1|$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n - 1| < (\frac{1}{2})^n |u_0 - 1|$$

En déduire la limite de (u_n)

Solution:

a) (6pts=4pts+2pts) $f^{'}(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1+x}} > 0$ et f est croissante sur $[-1, +\infty[$.

b-1)(12pts) $u_1 = f(u_0) = f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc $0 < u_0 < u_1 < 1$. Supposons par récurrence que cette proprieté est vraie pour $n-1$ c'est à dire

$$0 < u_{n-1} < u_n < 1$$

et montrons qu'elle est vraie pour n c'est à dire $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

En effet, d'après l'hypothèse de récurrence et vu que f est croissante, on a

$$f(0) < f(u_{n-1}) < f(u_n) < f(1)$$

c'est à dire: $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} = f(0) < u_n < u_{n+1} < 1 = f(1)$. D'où le résultat.

b-2)(4pts) $u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) est croissante. $u_n < 1$ donc (u_n) est majorée et parsuite (u_n) est convergente

b-3) 12pts=(8pts si on exprime $u_{n+1} - 1$ en fonction de $u_n - 1$)+(4pts pour l'inégalité)

$u_{n+1} - 1 = \dfrac{\sqrt{1+u_n} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{u_n - 1}{\sqrt{2}(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{2})}$ et donc

$$|u_{n+1} - 1| = \frac{|u_n - 1|}{2 + \sqrt{2(1+u_n)}} < \frac{1}{2}|u_n - 1|$$

b-4) (6pts=4pts+2pt)On a pour tout n, $|u_{n+1} - 1| < \frac{1}{2}|u_n - 1|$. Il en vient que

$$|u_n - 1| < \frac{1}{2}|u_{n-1} - 1| < \frac{1}{2^2}|u_{n-2} - 1| < \cdots < \frac{1}{2^n}|u_0 - 1|$$

c'est à dire

$$0 \leq |u_n - 1| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

et par passage à la limite on obtient $\lim |u_n - 1| = 0$ et donc $\lim u_n = 1$.

---

3. (25pts)On se donne la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   (a) Donner la valeur de a pour que $f(x)$ soit conimue en 0

   (b) Pour la valeur ainsi trouvée de a vérifier que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f^{'}(0)$

Solution:

a)(10pts) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(a\dfrac{\sin(ax)}{ax}) = a = f(0) = 2$ si f est continue en 0

b) (15pts) On a

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

et $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\sin(2x)}{x} - 2}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x) - 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-\frac{(2x)^3}{6}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-4}{3}x = 0 = f^{'}(0)$