

Est autorisé:
 Calculatrice Non Programmable

Partiel
Base de l'analyse Mathématique - MVA010

1. (15 pts)

- (a) Utiliser le développement limité en 0 pour trouver $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$
- (b) Utiliser le développement limité en $+\infty$ pour trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{-x^2}))^{\frac{1}{x}}$
- (c) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \ln(\frac{1}{\cos x})$, en déduire la tangente à la courbe de f en 0 ainsi que sa position par rapport à cette courbe.,

Solution:

a) (4pts) Soit $f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \sim_0 (1)^\infty$. Considérons $\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln(1 + \sin x) = \frac{1}{x} \ln(1 + x + x\varepsilon) = \frac{1}{x}(x + x\varepsilon) = 1 + \varepsilon$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x) = 1$ par suite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e$

b) (4pts) Soit $f(x) = (\ln(1 + e^{-x^2}))^{\frac{1}{x}} \sim_0 (0^0)$. Considérons $\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln(1 + e^{-x^2})$. Comme $\ln(1 + t) \sim_0 t$ alors $\ln f(x) \sim_\infty \frac{e^{-x^2}}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) = 0$ par suite $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

c) (7pts) Au voisinage de 0, $\cos x$ est positive. $\ln \frac{1}{\cos x} = -\ln \cos x = -\ln[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon] = -\ln(1 + t)$ avec $t = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

$$f(x) = -[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + t^4\varepsilon]$$

$f(x) = -[(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) - \frac{1}{2}(\frac{x^4}{4}) + x^4\varepsilon] = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{12}x^4 + x^4\varepsilon$. Ainsi $y = 0$ ($x'x$) est tangente à la courbe de f en 0 et $f(x) \sim \frac{x^2}{2} \geq 0$ donc la courbe est au dessus de la tangente.

(Barème:7pts= D.L de \cos (2pts), DL final (3pts), \tan (1pt) position (1pt))

2. (15pts) On considère les suites (u_n) et (w_n) :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad w_n = u_n + \frac{1}{n.n!}, \quad n \geq 1$$

- (a) Montrer que les deux suites considérées sont adjacentes
- (b) Montrer que leur limite commune l est un nombre irrationnel. (Procéder par contradiction en supposant que $l = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$)

(c) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, déterminer en fonction de l la limite de la suite à terme général:

$$\sum_{k=1}^n \frac{ak + b}{k!}$$

Solution:

a) (7pts) On a $w_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} > 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} > 0 \end{aligned}$$

la suite (u_n) est donc strictement croissante.

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

la suite (w_n) est strictement décroissante.

On a (u_n) croissante et majorée par w_1 et (w_n) est décroissante et minorée par u_1 donc ces suites sont convergentes. On a

$$\lim w_n = \lim u_n + \lim \frac{1}{n \cdot n!} = \lim u_n = l$$

Parsuite les deux suites sont adjacentes.

[Barème: 7pts= 1pts pour $w_n > u_n$, 2pts pour $(u_n) \nearrow$; 3pts pour $(w_n) \searrow$; 1pt même limite.]

b)(4pts). Supposons le contraire, soit $l = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} u_q &< l < w_q \\ u_q &< \frac{p}{q} < w_q \\ u_q &< \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q \cdot q!} \\ qu_q &< p < qu_q + \frac{1}{q!} \end{aligned}$$

Comme qu_q est un entier, p est un entier et $(qu_q + \frac{1}{q!}) - qu_q = \frac{1}{q!} < 1$ alors c'est une contradiction. D'où $l \notin \mathbb{Q}$

[Donner 1 point pour toute tentative de recherche]

c) (4pts) Soit $X_n = \sum_{k=1}^n \frac{ak+b}{k!} = a \sum_{k=1}^n \frac{k}{k!} + b \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = a \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} + b \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = a(1 + u_{n-1}) + bu_n$ alors $\lim X_n = a(1+l) + bl$

3. (10pts) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$ et dérivable sur son intérieur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout t intérieur à I , on ait $m \leq f'(t) \leq M$.

(a) Montrer que pour tout x et y éléments de I , tels que $x < y$, on a l'encadrement

$$m(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x)$$

(b) Application: Donner un encadrement de $\frac{\pi}{4}$ en faisant appel à la fonction arctan sur un intervalle convenable (Donner à x, y de valeurs particulières)

Solution:

a) (4pts) Les conditions du T.A.F sont toutes remplies sur $[x, y]$ donc il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$$

et comme $m \leq f'(c) \leq M$ alors

$$m(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x)$$

b)(6pts) Soit $f(t) = \arctan t$, $x = 0, y = 1$. On a $f'(t) = \frac{1}{1+t^2} \in [\frac{1}{2}, 1]$ pour tout $t \in [0, 1]$. D'où

$$\frac{1}{2}(1 - 0) \leq \arctan 1 - \arctan 0 < 1 \cdot (1 - 0)$$

$$0.5 < \frac{\pi}{4} < 1$$
