Institut des Sciences

Appliquées et Économiques

ISAE – Cnam Liban

Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date: 21 Juin 2012 – Durée: 3h00

2nd semestre

2011 – 2012

Sujet coordonné par: ***Ibrahim Ismail.***

Proposé pour les centres d'enseignement de: Beyrouth – Baalbek – Ghazza – Tripoli – Bickfaya – Baaklin – Nahr Ibrahim.

Langue de l'examen : Français

Calculatrice non programmable autorisée. Documents non autorisés.

Examen Final :

Applications de l'analyse à la géométrie, initiation à l'algèbre linéaire – MVA 006

Consignes particulières aux candidats: *Le sujet comporte 2 pages. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération. La rigueur et la clarté de votre rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.*

Exercice 1: (3 points)

Soit f la fonction de deux variables réelles définie par: $f(x,y)=2x^3-4y^2+ax+2y$ où a est un paramètre réel.

1-Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.

2-Etudier les points critiques de f en discutant selon les valeurs du paramètre a.

3- f admet-elle des extrémums en ces points ?

4-L'extrémum trouvé à la question précédente est-il global?

Exercice 2: (2,5 pts)

Soit (C) la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t)=te^t \\ y(t)=\dfrac{e^t}{t} \end{cases}$ où le paramètre t varie dans $\mathbb{R}^*$

1-Etudier les branches infinies de (C).

2-Dresser le tableau de variations des fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sur $\mathbb{R}^*$.

3-Dessiner la courbe (C). On précisera les points d'intersection de (C) avec les axes des coordonnées.

Exercice 3: (2 pts)

Soit Γ la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est donnée par $\rho(\theta)=2\sin(2\theta)$.

1-Montrer alors que pour obtenir entièrement Γ il suffit de l'étudier pour $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, puis d'effectuer deux symétries.

2-Etudier et tracer entièrement la courbe Γ. On précisera les équations des tangentes à Γ en $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{4}$ et $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4: (4,5 pts)

Calculer les intégrales doubles suivantes :

a) $I=\iint_D \dfrac{dxdy}{(x+y)^2}$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 1,\ y\geq 1,\ x+y\leq 3\}$.

b) $J=\iint_D (1-2\cos(x^2+y^2))\,dxdy$ où D est l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 1.

c) $K=\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$

Exercice 5: (1,5)

Calculer la masse de la plaque pesante occupant le domaine du plan défini par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y,\ x^2 + y^2 - 2x \le 0\}$ de masse surfacique (superficielle) $f(x, y) = xy$.

Exercice 6: (2 pts)

Soit Ω la région de l'espace limitée en bas par le plan xOy , en haut par la surface d'équation $4z = 16 - x^2 - y^2$ et latéralement par le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 4$.

Calculer le volume et les coordonnées du centre de gravité de Ω (considéré comme un solide plein homogène).

Exercice 7: (1,5 pts)

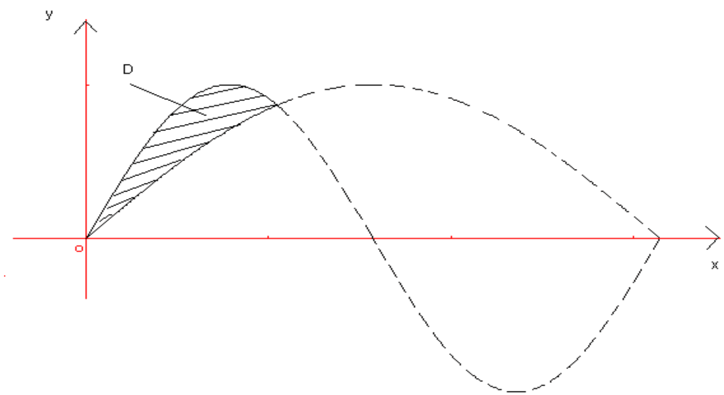
Soit l'intégrale curviligne suivante:

$I = \oint_\Gamma (1 + y^2)dx + ydy$ où Γ est la frontière du domaine D limité par les courbes d'équations

$y = \sin x,\quad y = \sin(2x),\quad x = 0$ et $x = \pi/3$,

traversée dans le sens des aiguilles d'une montre.

Calculer I en utilisant la formule de Green-Riemann.



Exercice 8: (3 pts)

On considère les matrices suivantes: $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1-Calculer la matrice $(A + I_3)(A + 2I_3)(A + 3I_3)$.

2-En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

3-Retrouver A^{-1} par la méthode des cofacteurs.

4-Trouver les matrices X et Y telles que : $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5-Résoudre le système linéaire suivant : $\begin{cases} -2x - 2y + 2z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.