Faculté des Sciences - UL | Géométrie Différentielle | J.Saab
Département de Maths | Td 2

---

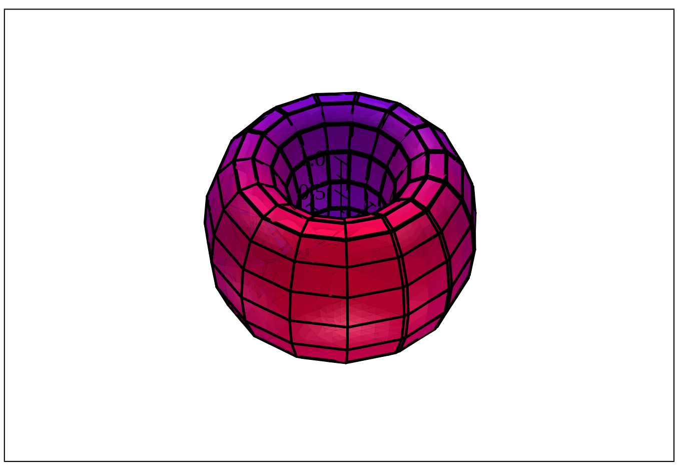
1. Montrer que si $f(x,y)$ est une fonction lisse, son graphe
$$G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \ / \ \ z = f(x,y)\}$$
est une surface lisse constituée d'une seule carte

2. Montrer que
$$\sigma(r,\theta) = (rch\theta, rsh\theta, r^2)$$
est une paramétrisation de la partie $z > 0$ de l'hyperboloïde paraboloïde
$$z = x^2 - y^2$$
Trouver une autre paramétrisation pour la partie $z < 0$ de cette surface

3. Montrer que l'ellipsoïde
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
est une surface lisse

4. Une tore est obtenue par la rotation d'un cercle (C) dans un plan (Π) autour d'une droite (l) de (Π) qui ne coupe pas (C). Prendre (Π) le plan xoz, l est l'axe oz, $a > 0$ est la distance du centre de (C) de (l) et $b < a$ est le rayon de (C). Montrer que la tore est une surface lisse:

   (a) en montrant qu'elle admet un atlas formé de cartes
   $$\sigma(\theta,\varphi) = ((a + b\cos\theta)\cos\varphi, (a + b\cos\theta)\sin\varphi, b\sin\theta)$$



   (b) en montrant que c'est une surface donnée par
   $$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a(x^2 + y^2)$$

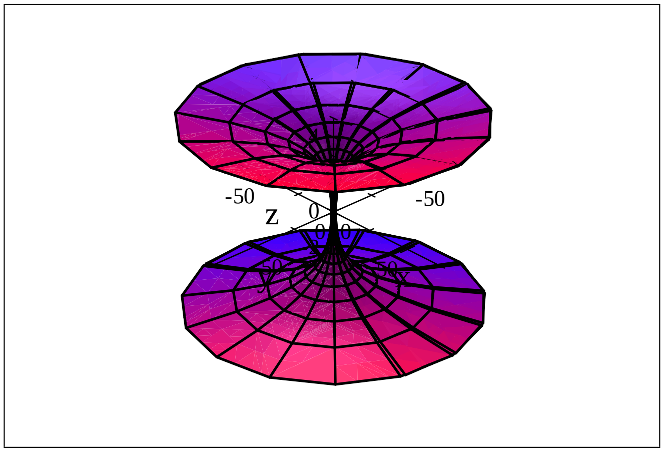
5. Trouver l'équation du plan tangent des cartes suivantes, aux points indiqués:

   (a) $\sigma(u,v) = (u, v, u^2 - v^2), \quad (1,1,0)$
   (b) $\sigma(r,\theta) = (rch\theta, rsh\theta, r^2), \quad (1,0,1)$

6. On considère la surface $(S) : z = f(x,y)$ où f est une fonction lisse telle que $(f_x, f_y, f_z) \neq (0,0,0)$ en tout point. Montrer que le vecteur
$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$
est orthogonal à (S) en tout point et déduire que (S) est orientable

7. On appelle catenoïde la surface obtenue par la rotation de la courbe $x = chz$ dans xoz autour de oz. Décrire un atlas pour cette surface

   $[\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u]$



8. Montrer que

$$\sigma(u,v) = (\arg\sinh u \cos v, \arg\sinh u \sin v, \tanh u)$$

   est une carte regulière de la phère unité