Faculté des Sciences - UL | Géométrie Différentielle | J.Saab
Département de Maths | Td 1

---

1. Soit X un espace affine de dimension 3 et $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère catésien de X.On considère l 'application affine f de X dans X qui à $M(x, y, z)$ associe $M'(x', y', z')$ vérifiant les relations:

$$\begin{cases} x' &= y + z - 1 \\ y' &= x + z - 1 \\ z' &= x + y - 1 \end{cases}$$

   (a) Vérifier que f est une bijetion de X dans X. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de $\overrightarrow{f}$

   (b) Montrer que f admet un point fixe que l'on note I

   (c) Trouver les droites fixes de f.

---

2. Soit E un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$. On suppose que E est affine euclidien, c'est à dire $\overrightarrow{E}$ est euclidien. Pour tous p, q deux points de E on définit une distance entre p et q par

$$d(p, q) = ||\overrightarrow{pq}||$$

Une application f sur E est une isométrie si elle conserve la distance: $d(f(p), f(q)) = d(p, q)$

   (a) Montrer que les translations sont des isométries

   (b) Montrer que si f est affine et $\overrightarrow{f} \in O(E)$ alors f est une isométrie

   (c) Soit $u : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ une application telle que

$$\begin{cases} u(0) &= 0 \\ ||u(a) - u(b)|| &= ||a - b||, \quad \forall a, b \in \overrightarrow{E} \end{cases}$$

      i. Montrer que u conserve la norme: $||u(a)|| = ||a||, \quad \forall a \in \overrightarrow{E}$

      ii. Etablir l 'égalité $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$ et déduire que $||u(a) + u(b)||^2 = ||a + b||^2$

      iii. Déduire de la partie b) que u conserve le produit scalaire: $< u(a), u(b) >=< a, b >, \quad \forall a, b \in \overrightarrow{E}$

      iv. Vérifier que u est injective et montrer que si $\{e_i\}_{i=1..n}$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$ alors $\{u(e_i)\}_{i=1..n}$ est aussi une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$

v. Montrer que $< u(\lambda a+\mu b)-\lambda u(a)-\mu u(b), u(e_i) >= 0, \quad \forall i$ et en déduire que u est linéaire

(d) En utilisant les parties $c)$ montrer que si f est une isométrie alors f est affine et $\overrightarrow{f} \in O(\overrightarrow{E})$

---

3. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ distincts. Montrer que $(a, \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{cd})$ est un repère affine si ab et cd ne sont pas dans un même plan.

---

4. Soit un plan affine P de $\mathbb{R}^2, (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) \in P$ trois points non alignés et $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $\Delta = d\acute{e}t \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une aplication définie par:

$$f(x_1, x_2, x_3) = d\acute{e}t \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Vérfier que f est une forme affine et que l'équation de P est donnée par $f(x) = 0$

---

5. Soit l'application affine

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \rightarrow & \alpha x + b \end{array}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ et b un vecteur fixé de $\mathbb{R}^2$

(a) Pourquoi est ce que f est une homothétie

(b) Trouver le centre de f en fonction de α et de b

(c) Quel doit - être le rapport de f si $f^2(x) = f \circ f(x)$ est le centre du segment $[x, f(x)]$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

---

6. Dans le plan affine, on considère trois points non alignés, A, B, C constituant un repère affine. On choisit trois points A', B', C' appartenant respectivement aux droites $(BC), (AC)$, et (AB), les points A, B, C étant

exclus. On suppose donc que la matrice représentant les points $A^{'}, B^{'}, C^{'}$ dans le repère est:

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & 1-\gamma \\ 1-\alpha & 0 & \gamma \\ \alpha & 1-\beta & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta, \gamma \notin \{0, 1\}$$

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β pour que les droites $(AA^{'})$ et $(BB^{'})$ se coupent en un point unique M.Ecrire les composantes de M dans le repère (A, B, C).

(Ind:Considérer un point M de la droite $AA^{'}$, les deux droites $AA^{'}$ et $BB^{'}$ se coupent en M si $B, M, B^{'}$sont alignés)

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que les droites $(AA^{'}), (BB^{'})$ et $(CC^{'})$ se coupent en M

---

7. Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires d'un espace affine de dimension 3. On définit les points E, F, G par

$$E \text{ est le milieu de } AB, \quad \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \text{ et } G = bary\{(C, 1), (D, 3)\}$$

(a) Donner les coordonnées barycentriques des points E, F, G dans le repère A, B, C, D

(b) Soient H, M, N trois points de l'e.a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées barycentriques dans le repère A, B, C, D :

i. Pour qu'un point M appartienne à la droite (EG)

ii. Pour qu'un point N appartienne à la droite $(HF), H$ étant un point de la droite (AD)

(c) Montrer qu'il existe un point unique H de (AD) tel que les droites (EG) et (HF) soient concoutantes

---