Université Libanaise	**Géométrie Différentielle**	**Le:Janvier 2011**
Ecole Doctorale	**Fibré Vectoriel**	**Prof: J. Saab**
Laboratoire de Mathématiques	**Master 2 Solution**	**Durée:3h**

1. On a $g(\partial\theta,\partial\theta)=g_0(\psi_*\partial\theta,\psi_*\partial\theta)$; $g(\partial\theta,\partial z)=g_0(\psi_*\partial\theta,\psi_*\partial z)$; $g(\partial z,\partial z)=g_0(\psi_*\partial z,\psi_*\partial z)$; avec

$$\psi_*(\theta,z)=\begin{pmatrix}-\sin\theta & 0\\ \cos\theta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

de sorte que $g=d\theta\otimes d\theta+dz\otimes dz$. et donc la connexion ∇ qui lui est associée est nulle. Les géodésiques de ∇ sont

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{d^2\theta}{dt^2} & = & 0\\ \dfrac{d^2\theta}{dt^2} & = & 0\end{array}\right.$$

dont la solution est $z=a\theta+b$.

- à θ fixé, ce sont les droites verticales du cylindre

- à z fixé, ce sont les cercles horizontaux du cylindre

- à θ et z quelconques, les géodésiques obtenues sont:

$$\left\{\begin{array}{lcl}x & = & \cos\theta\\ y & = & \sin\theta\\ z & = & a\theta+b\end{array}\right.$$

qui représentent les hélices sur (C).

L'équation paramétrique de l'ellipse est

$$\left\{\begin{array}{lcl}\theta & = & t\\ z & = & \cos t+\sin t\end{array}\right.$$

si $V(t)=(\theta(t),z(t))$ est le transport parallèle de V le long de γ alors

$$\frac{dV^k}{dt}+V^i(\gamma(t)).\frac{d\gamma^j}{dt}\Gamma^k_{ij}=0$$

Soit:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\frac{dV^1}{dt} & = & 0\\ \frac{dV^2}{dt} & = & 0\end{array}\right.$$

On a donc $V^1=\alpha$, $V^2=\beta$ pour certains $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ Ce vecteur prolonge V au point $p=\gamma(\theta=\frac{\pi}{2})$, donc $\alpha e^{-\frac{\pi}{2}}=a$ et $\beta e^{-1}=b$. D'où

$$V(t)=a\partial_\theta+b\partial_z$$

ce qui est normale car le transport parallèle correspondant à une connexion nulle est un vecteur constant.

Finalement, $<u,v>=<\widetilde{u},\widetilde{v}>=0$.

2. Soient $(\bar\theta,\bar\phi)$ les nouvelles coordonnées après les deux rotations, on a

$$\left\{\begin{array}{lcl}u & = & -x\\ v & = & -z\\ w & = & -y\end{array}\right.$$

il en vient

$$\left\{\begin{array}{rcl}\cos\bar\theta\cos\bar\phi & = & -\cos\theta\cos\phi\\ \sin\bar\theta\cos\bar\phi & = & -\sin\phi\\ \sin\bar\phi & = & -\sin\theta\cos\phi\end{array}\right.$$

en divisant les deux premières équations:

$$\left\{\begin{array}{c} \tan\bar\theta = \frac{\tan\phi}{\cos\theta} \\ \sin\bar\phi = -\sin\theta\cos\phi \end{array}\right.$$

et donc

$$\left\{\begin{array}{ccc} \bar\theta & = & \tan^{-1}(\frac{\tan\phi}{\cos\theta}) \\ \bar\phi & = & -\sin^{-1}(\sin\theta\cos\phi) \end{array}\right.$$

il n'est pas difficile de montrer (voir le cours) que si $V \in T_pM$, $p \in U_1 \cap U_2$ de sorte que $V \underset{U_1}{=} V^i \frac{\partial}{\partial x_i} \underset{U_2}{=} W^j \frac{\partial}{\partial y_j}$ alors l'application de transition

$$\phi_{12} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow Gl(n)$$

est donnée par

$$\phi_{12}(p)(V^1, \cdots, V^n) = (V^i \frac{\partial y^1}{\partial x_i}, \cdots, V^i \frac{\partial y^n}{\partial x_i})$$

Dans le cas de la sphère, si $V \underset{U_1}{=} V^1 \dfrac{\partial}{\partial\theta} + V^2 \dfrac{\partial}{\partial\phi} \underset{U_2}{=} \bar V^1 \dfrac{\partial}{\partial\bar\theta} + \bar V^2 \dfrac{\partial}{\partial\bar\phi}$ alors

$$\phi_{12}(p) \quad = \quad (V^1 \tfrac{\partial\bar\theta}{\partial\theta} + V^2 \tfrac{\partial\bar\theta}{\partial\phi}, V^1 \tfrac{\partial\bar\phi}{\partial\theta} + V^2 \tfrac{\partial\bar\phi}{\partial\phi})$$

il suffit deonc fe faire le calcul de dérivations.

3. $\otimes_1^1 TM \xrightarrow{\pi} M$ telle que $\pi(p, t_p) = p$ est un fibré vectoriel, ses fibres au dessus de p sont les $\otimes_1^1 T_pM = \{t_p : T_pM \longrightarrow T_pM, \text{ linéaire}\}$ ce sont des espaces vectoriels de dimension 4. Si (x, U) est une carte autour de p, alors une base locale de $\otimes_1^1 T_pM$ est $\{dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}\}_{i,j=1,2}$.

   Si $f : M \longrightarrow M$ est un difféomorphisme (local), alors f induit, en tout point $p \in<$, une application $f_p^* : \otimes_1^1 T_pM \longrightarrow \otimes_1^1 T_pM$ telle que $f_p^*(t_p)(X_p) = t_p(f_{*,p} X_p)$. Il en vient que

$$f_p^*(t_p)(\frac{\partial}{\partial x_i}) = t_p(\frac{\partial f^k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y^k}) = t_{km} \frac{\partial f^k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_m}$$

   Si $t = t_i^j dx^i \otimes \partial x_j = \widetilde{t}_i^j dy^i \otimes \partial y_j$ alors

$$\begin{array}{rcl} t_i^j dx^i \otimes \partial x_j & = & \widetilde{t}_i^j . [\frac{\partial y^i}{\partial x_l} . dx^l] \otimes [\frac{\partial x_k}{\partial y j} . \frac{\partial}{\partial x_k}] \\ & = & \widetilde{t}_i^j . \frac{\partial y^i}{\partial x_l} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} dx^l \otimes \frac{\partial}{\partial x_k} \\ & = & \widetilde{t}_l^m . \frac{\partial y^l}{\partial x_i} \frac{\partial x_j}{\partial y_m} dx^i \otimes \partial x_j \end{array}$$

   On en déduit que

$$t_i^j = \widetilde{t}_l^m . \frac{\partial y^l}{\partial x_i} \frac{\partial x_j}{\partial y_m}$$

   ou

$$\begin{bmatrix} t_1^1 \\ t_1^2 \\ t_2^1 \\ t_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y^1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{t}_1^1 \\ \widetilde{t}_1^2 \\ \widetilde{t}_2^1 \\ \widetilde{t}_2^2 \end{bmatrix}$$

   et

$$\phi_{12}(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y^1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$\Gamma(\otimes_1^1 TM) = \{t : M \longrightarrow \otimes_1^1 TM \;\; / \;\; s(p) \in \otimes_1^1 T_p M\}$ et ceci n'est autre chose que $\otimes_1^1 M$.

Soit $(\widetilde{\nabla}_X L)(Y) = \nabla_X L(Y) - L(\nabla_X Y)$. On va se contenter de montrer que pour tout $f \in C^\infty(M)$ on a $(\widetilde{\nabla}_X f.L) = X(f)L + f.\widetilde{\nabla}_X L$.

en effet, soit $Y \in \chi(M)$, $(\widetilde{\nabla}_X f.L)(Y) = \nabla_X f.L(Y) - f.L(\nabla_X Y) = X(f).L(Y) + f\nabla_X L(Y) - fL(\nabla_X Y)$ car ∇ est une connexion.

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\nabla}_X f.L)(Y) &= X(f).L(Y) + f[\nabla_X L(Y) - L(\nabla_X Y)] \\
&= X(f).L(Y) + f(\widetilde{\nabla}_X L)(Y)
\end{aligned}$$

Parsuite $\widetilde{\nabla}$ est une connexion sur $\otimes_1^1 M$.

4. Voir cours