Durée: 1h

1. (6pts) Soit (γ) l'helice définie par:

$$\gamma(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta), \; a, b > 0, \; a^2 + b^2 \neq 1 \text{ et } \; \theta \in \mathbb{R}$$

   (a) Vérifier que γ n'est pas à paramètre curviligne
   (b) Calculer la courbure K de (γ)
   (c) Trouver $s = s(\theta)$ le paramètre curviligne associé à γ et retrouver K, la courbure de γ
   (d) Donner le trièdre de Frenet $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ où $\vec{T}$: est la tangente unitaire à (γ) au point $\gamma(s)$; $\vec{N}$: est la normale principale à (γ) en $\gamma(s)$, $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ et calculer la torsion τ de γ
   (e) Donner une interprétation géométrique de vos résultats

---

2. (6pts) On donne la fonction lisse $K : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $K(s) = \dfrac{2}{1+s^2}$

   (a) Donner l'équation de la courbe plane γ ayant pour courbure orientée K. (On rappelle que $\cos(2\alpha) = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}, \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$)
   (b) Pourriez vous donner l'exemple d'une courbe $\widetilde{\gamma}(s)$ autre que $\gamma(s)$, qui aurait pour courbure K

---

3. (8pts) On considère la projection stéréograohique de $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

$$\pi : S^2 - \{P\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

   de S^2 moins le pôle sud $P(0, 0, -1)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $m(u, v)$ intersection de la droite (PM) avec le plan xoy.

   (a) Montrer que π^{-1} définie une carte de S^2 et déterminer son domaine
   (b) construire une autre paramétrisation de S^2 de sorte que S^2 munie de ces deux cartes soit une surface régulière

---