Durée: 2h

1. (6pts) On se donne une surface de révolution $(S)$ paramétrisée par:

$$\begin{aligned} X(u,v) &= (f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v)) \\ a &\le v \le b, \quad 0 \le u \le 2\pi, \quad f(v) > 0 \end{aligned}$$

définie par la rotation de la courbe

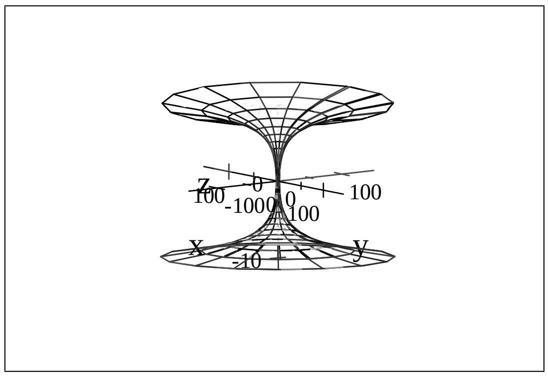
$$(C) : \begin{cases} x = f(v) \\ z = g(v) \end{cases}$$

du plan $xoz$ autour de l'axe $oz$, où $f$ et $g$ sont suffisamment régulières et $(C)$ n'est pas nécessairement à vecteur vitesse unitaire.

(a) Donner les coéfficients $E,\ F$ et $G$ de la première forme fondamentale de $(S)$

(b) En particulier on va considérer la surface de révolution "le caténoïde" associée à la courbe $(C)$ :

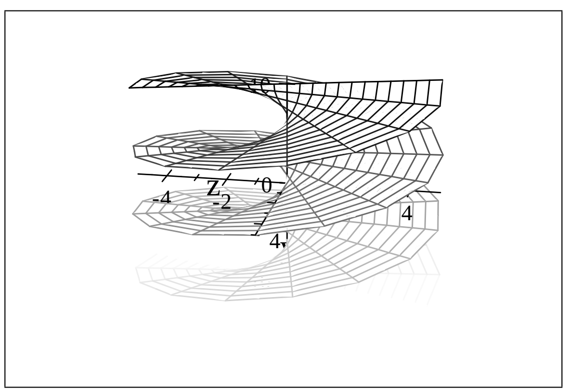
$$x = achv,\ z = av, \quad -\infty < v < \infty, \quad a \text{ est une constante}$$




Déduire les coèfficients de sa première forme fondamentale

(c) On considère maintenant l'helicoïde paramétrisée par

$$\bar{X}(\bar{u},\bar{v}) = (\bar{v}\cos\bar{u}, \bar{v}\sin\bar{u}, a\bar{u}), \qquad 0 < \bar{u} < 2\pi, \quad -\infty < \bar{v} < \infty$$




On rappelle qu'une bijection

$$\begin{array}{ccc} ]0,2\pi[\times]-\infty,+\infty[ & \xrightarrow{f} & ]0,2\pi[\times]-\infty,+\infty[ \\ (u,v) & \rightarrow & \bar{u}=u, \bar{v}=ashv \end{array}$$

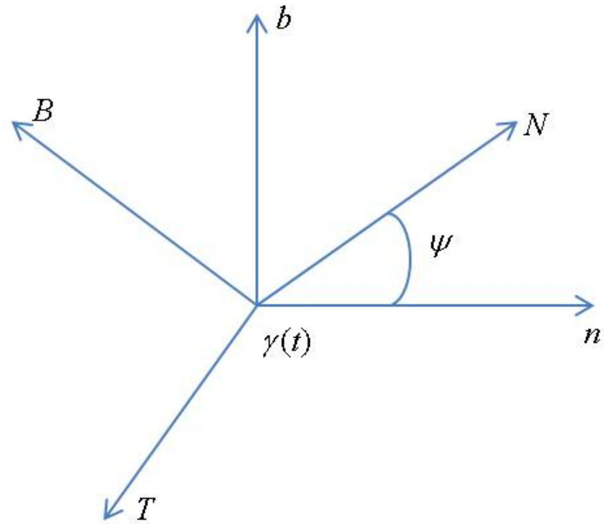
est un changement de variable si le Jacobien $\dfrac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}$ est non nul pour tout $(u,v)$.

Vérifier que $f$ définit un changement de variable, donner la nouvelle paramétrisation de l'hélicoïde en fonction de $(u,v)$, En déduire que le caténoïde et l'hélicoïde sont isométriques.

(d) Calculer l'aire du domaine du caténoïde correspondant à $0 < v < 1$.

---

2. (6pts) Soit $\gamma$ une courbe à vecteur vitesse unitaire, d'une surface $(S)$. On rappelle les notations suivantes: $N$ est la normale unitaire à $(S)$ au point $\gamma(t)$, $T$ est le vecteur vitesse unitaire à $\gamma$ en $\gamma(t)$, $n$ est la normale unitaire à $\gamma$ en $\gamma(t)$, $b = T \wedge n$ le vecteur binormal, $B = T \wedge N$, $\psi$ est l'angle entre $\gamma''$ et $N$ .




(a) Montrer que
$$N = (\cos\psi)n + (\sin\psi)b; \qquad B = (\cos\psi)b - (\sin\psi)n$$

(b) En déduire que:
$$T' = k_n N - k_g B;\ \ N' = -k_n T + \tau_g B;\ \ B' = k_g T - \tau_g N$$
avec $k_n$ est la courbure normale de $\gamma$, $k_g$ est la courbure géodésique, $\tau_g = \tau + \psi'$ est la torsion géodésique de $\gamma$

(c) Montrer que $\gamma'' = 0$ si et seulement si $N$ est parallèle à $b$

(d) La courbe $\gamma$ est dite asymptotique si sa courbure normale est identiquement nulle, déduire de $c$) que toute droite $\gamma = p + tq$, $q$ étant un vecteur unitaire, d'une surface $(S)$ est une courbe asymptotique.

(e) En déduire qu'une courbe $\gamma$ ayant une courbure positive est asymptotique si et seulement si $b$ est parallèle à $N$ en tout point de $\gamma$

(f) Montrer que les courbes asymptotiques de la surface $(S)$
$$X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \ln u)$$
sont données par: $\ln u = \pm(v + c)$, $c$ est une constante arbitraire

(g) Montrer qu'une courbe asymptotique ayant une courbure positive vérifie: $\tau_g = \tau$

---

3. (2pts) Soit $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ une coube à vecteur vitesse unitaire d'une carte $(X, U)$ d'une surface $(S)$. Montrer que sa courbure normale est donnée par
$$k_n = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2$$
où $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ est la deuxième forme fondamentale de $X$

---

4. (6pts) On considère le paraboloïde $(S)$ paramétrisé par

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$$

(a) Trouver la première et la deuxième forme fondamentales de $X$

(b) En déduire les courbures principales et les vecteurs principaux de $X$, et en donner une interprétation géométrique

(c) Quelles sont les lignes de courbures de $(S)$, c'est à dire les courbes de $(S)$ dont les tangentes en tout point sont un vecteur principal

(d) Existe -t-il de points umbilliques sur $(S)$

---