Université Libanaise **Géométrie Différentielle** **Le:Janvier 2012**
Ecole Doctorale **Fibré Vectoriel** **Prof: J. Saab**
Laboratoire de Mathématiques **Master 2 Examen Final** **Durée:3h**

---

1. On considère le cercle S^1 en tant que variété munie de l'atlas

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \varphi_1: & S^1 - \{(1,0)\} & \longrightarrow & (0,2\pi) \\ & (\cos\theta, \sin\theta) & \rightarrow & \theta \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{cccc} \varphi_2: & S^1 - \{(-1,0)\} & \longrightarrow & (0,2\pi) \\ & (\cos(\theta+\pi), \sin(\theta+\pi)) & \rightarrow & \theta \end{array} \right.$$

le changement de cartes est

$$\begin{array}{cccc} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: & (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi) & \longrightarrow & (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi) \\ & \theta & \rightarrow & \alpha = (\theta + \pi) \mod 2\pi \end{array}$$

où $a \mod 2\pi$ est l'unique réel $r \in [0, 2\pi[$ tel que $a = 2k\pi + r$.

Soit ζ le fibré vectoriel de base S^1 et d'espace total le ruban de Möbius donné par la paramétrisation dans $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{cccc} X: & [0,2\pi] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (u,t) & \rightarrow & (\cos u, \sin u, t\cos\frac{u}{2}, t\sin\frac{u}{2}) \end{array}$$

Donner les applications de trivialisation et l'application de transition ψ_1, ψ_2, et ψ_{21} de ζ

---

2. Soit M^m une variété différentielle de dimension m. Montrer que le fibré vectoriel E sur M^m de fibre type $\mathbb{R}^n$ est une variété de dimension $m+n$.

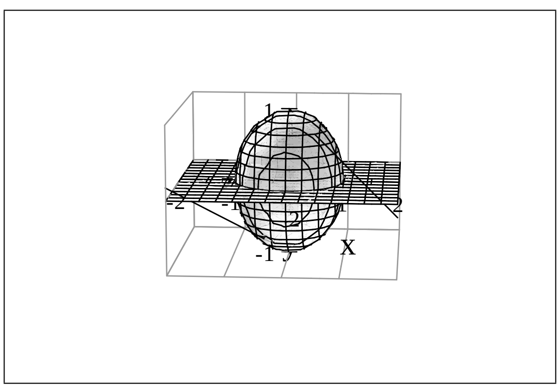
Indication: considérer

$$\tau_\alpha: \quad \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\psi_\alpha^{-1}} U_\alpha \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi_\alpha \times id} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$$

avec $\varphi_\alpha \times id(p,v) = (\varphi_\alpha(p), v)$ et vérifier que $(\pi^{-1}(U_\alpha), \tau_\alpha)$ est un atlas sur E

---

3. On considère la sphère $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ munie d'un atlas de deux cartes, données par la projection steréographique dépuis le pole nord et le pole sud



$$\begin{array}{cccc} \pi_N: & S^2 - \{(1,0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \rightarrow & (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}) \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{cccc} \pi_S: & S^2 - \{(1,0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \rightarrow & (\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}) \end{array} \tag{2}$$

munie de cet atlas, S^2 n'est pas orientable, on considère alors l'atlas $\{\pi_N, \overline{\pi_S}\}$ où $\overline{\pi_S}$ est la composition de π_S avec la reflexion $(u,v) \rightarrow (u,-v)$ et donc

$$\overline{\pi_S}(x,y,z) = (\frac{x}{1+z}, \frac{-y}{1+z})$$

le changement de cartes $(\overline{u}, \bar{v}) = \overline{\pi_S}(u, v) = \overline{\pi_S} \circ \pi_N^{-1}(u, v)$:

$$\bar{u} = \frac{u}{u^2 + v^2}, \bar{v} = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

(a) Donner l'atlas du fibré TS^2

(b) Préciser les fonctions de transition de cet atlas

---

4. On considère une variété Riemannienne M de dimension 2 et soit la variété des champs de 2-formes symétriques S^2TM. Une 2-forme symétrique α, vérifie $\alpha(x)$ est une forme bilinéaire symétrique sur T_xM. Noter que $\dim S^2TM = \frac{n(n+1)}{2} = 3$ lorsque $\dim M = 2$

   (a) Vérifier que S^2TM est un fibré vectoriel sur M, préciser ses fonctions de trivialisation et ses fonctions de transition

   (b) Quelles sont les séctions de S^2TM

   (c) Soit ∇^M la connexion sur M adaptée à la métrique g de M. Donner la connexion ∇ sur le fibré S^2TM et la métrique associées à ∇^M et g

   (d) Montrer que la connexion et la métrique ainsi définie sur S^2TM sont compatibles

   (e) Exprimer la courbure de S^2TM en fonction de celle de M

(a) Montrer que tout fibré vectoriel admet une structure euclidienne. en particulier, toute variété différentielle admet une structure Riemannienne

(b) Montrer que le groupe de structure d'un fibré vectoriel ς, de rang n, (qui est habituellement $Gl(n, \mathbb{R})$) peut être réduit à $O(n)$. Il peut être réduit à $SO(n)$ si et seulement si ς est orientable

---