Université Libanaise	**Géométrie Différentielle**	**Décembre 2010**
Ecole Doctorale	**Fibré Vectoriel**	**Prof: J. Saab**
Laboratoire de Mathématiques	**Master 2 Examen Final**	**Durée:3h**

1. Soit (C) le cylindre de $\mathbb{R}^3$ de rayon 1 et d'axe oz. Soient $(\theta, z) \in]0, 2\pi[\times\mathbb{R}$ les coordonnées locales de $(C) : \psi(\theta, z) = (x = \cos\theta, y = \sin\theta, z = z)$. Soit

$$g_0 = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

la métrique canonique sur $\mathbb{R}^3$.

(a) Trouver la métrique g sur (C) donnée par la restriction de g_0 sur (C)

(b) Trouver la connexion ∇ sur (C) qui est compatible avec g

(c) Donner les géodésiques sur (C) relativement à ∇ et vérifier qu'elles sont , soit les droites vertcales, soit les cercles horizontaux soit les helices sur (C)

(d) Soit (γ) l'ellipse sur (C) d'équation $z = \cos\theta + \sin\theta$ et soit $p(\frac{\pi}{2}, 1)$ un point de (γ) soit $V = a\frac{\partial}{\partial\theta} + b\frac{\partial}{\partial z}|_p$ un vecteur de T_pC

1. Trouver le transport parallèl de V le long de (γ) relativement à la connexion ∇
2. Soient $u = \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial z}|_p$ et $v = \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial z}|_p$ deux vecteurs de T_pC. Vérifier par le calcul que le produit scalaire $< u, v >=< \widetilde{u}, \widetilde{v} >$ où $\widetilde{u}$ et $\widetilde{v}$ sont respectivement les transports parallèls le long de γ de u et v au point $\gamma(t)$

---

2. On considère S^2 la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. On considère un recouvrement de S^2 par deux cartes (U, σ) et (V, δ) où

$$\begin{array}{rcl} U & = & S^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\; / \;\; y \neq 0 \;\; \text{ou} \;\; x < 0\} \\ V & = & S^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\; / \;\; z \neq 0 \;\; \text{ou} \;\; x > 0\} \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rccl} \sigma : &]0.2\pi[\times]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & U \\ & (\theta, \varphi) & \rightarrow & (x = \cos\theta\sin\varphi, y = \sin\theta\cos\varphi, z = \sin\varphi) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \delta : &]0.2\pi[\times]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & V \\ & (\theta, \varphi) & \rightarrow & (u = -\cos\theta\sin\varphi, v = -\sin\varphi, w = -\sin\theta\cos\varphi) \end{array}$$

c'est à dire $\delta(\theta, \varphi)$ est la rotation de $\sigma(\theta, \varphi)$, d'angle π autour de oz suivie par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de ox. Aussi, $\theta = (\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oM'})$, $\varphi = (\overrightarrow{oM'}, \overrightarrow{oM})$ avec $M' = \mathrm{Proj}_{xoy}M$
Le changement de coordonnées est $(u, v, w) = (-x, -z, -y)$.
Donner l'application de transition φ_{12} du fibré tangent TS^2 relative à ce recouvrement.

---

3. Soit M une variété de dimension 2, on considère l'espace des tenseurs $1-$ covariants et $1-$contravariants $\otimes_1^1 M = \{t : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)\ C^\infty\text{-linéaires}\}$. Si (x_i) est un système de coordonnées locales autour d'un point $x \in M$ alors $\{dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x_j}\}$ est une base locale du module $\otimes_1^1 M$.

(a) Vérifier que $\otimes_1^1 TM = \bigcup_{x\in M} \otimes_1^1 T_xM$ est un fibré vectoriel sur M. Déterminer ses fibes et son rang

(b) Soient $\{x_i\}$, et $\{y_i\}$ deux systèmes de coordonnées locales autour de $x \in M$

1. Vérifier que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i})_x = \frac{\partial x^j}{\partial y_i})_x \frac{\partial}{\partial x_j})_x \\ dy^i)_x = \frac{\partial y^i}{\partial x_j})_x dx^j)_x \end{cases}$$

2. Déduire les applications de transition $\varphi_{i\ j}(x, v),\ x \in U_i \cap U_j;\ v \in \mathbb{R}^4$
IND.$T \in \otimes_1^1 T_xM,\ T = T_i^j dx^i \otimes \partial x_j = \widetilde{T}_i^j dy^i \otimes \partial y_j$. Exprimer $\widetilde{T}_i^j$ en fonction de T_i^j

(c) On suppose que (M,g) une variété Riemannienne et ∇ une connexion sur M compatible avec g. Soit $\Gamma(\otimes_1^1 TM)$ l'espace des sections sur le fibré $\otimes_1^1 TM$ Etablir $\Gamma(\otimes_1^1 TM) = \otimes_1^1 M$

(d) On définit $\widetilde{\nabla} : \chi(M) \times \otimes_1^1 M \longrightarrow \otimes_1^1 M$ par $(\widetilde{\nabla}_X L)Y = \nabla_X L(Y) - L(\nabla_X Y)$. Vérifier si $\widetilde{\nabla}$ est une connxion sur le fibré $\otimes_1^1 TM$

---

4. Soit (M,g) une variété Riemannienne et ∇ la connexion associée à g. Soit $\flat : T_x M \longrightarrow T_x^* M$ et $\sharp : T_x^* M \longrightarrow T_x M$ l'application musicale et son inverse. et soit $< w_1, w_2 >_{*:} = < \sharp w_1, \sharp w_2 >$ le produit scalaire sur le fibré T^*M induit par $<,>$ .On définit $\nabla^*_X W = \flat \nabla_X \sharp w$.

(a) Vérifier que ∇^* est une connexion sur le fibré T^*M qui est adaptée à la métrique $<,>_*$

(b) Montrer que $(\nabla^*_X w)(Y) = Xw(Y) - w(\nabla_X Y)$

(c) Montrer que la courbure R^* associée à ∇^* est donnée par:

$$[R^*(X,Y)w]Z = -wR(X,Y)Z \quad \forall X,Y,Z \in \chi(M), \quad w \in \wedge^1 M$$
