Chapitre 7 : Connexions, théorie de Chern-Weil

Pierre Pansu

July 12, 2005

1 Connexions sur un fibré vectoriel

1.1 Définition

Définition 1.1 *Soit ξ un fibré vectoriel lisse, réel ou complexe, sur une variété lisse M. Une* connexion *(`connection`) ∇ sur ξ est un opérateur ∇ qui prend une section lisse s de ξ, et lui associe un champ d'homomorphismes ∇s du fibré tangent dans ξ (si w est un vecteur tangent en x, on note $\nabla s(x,w) = (\nabla_w s)(x)$), et tel que, pour toute fonction f,*

$$\nabla_w fs = f\nabla_w s + df(w)s.$$

Exemple 1.2 *Sur le fibré trivial $M \times \mathbf{R}^n$, on dispose de la* connexion triviale *∇^0. Si s est une section lisse vue comme application $M \to \mathbf{R}^n$, $\nabla^0 s = ds$.*

Plus généralement, si $(s_1, \ldots, s_n)$ est un champ de repères local lisse d'un fibré ξ, la connexion naïve *∇^0 du champ de repères est définie par*

$$\nabla^0(\sum_{i=1}^{n} u_i s_i) = \sum_{i=1}^{n} du_i s_i$$

Remarque 1.3 *On appelle parfois* connexion affine *(`affine connection`) une connexion sur le fibré tangent d'une variété.*

1.2 Matrice de la connexion

Définition 1.4 *Soit ∇ une connexion sur ξ. Soit $(s_1, \ldots, s_n)$ un champ de repères local lisse de ξ.*

$$\nabla_w s = \nabla^0_w s + \Gamma(w,s),$$

où $\Gamma \in T^*M \otimes End(\xi)$, ce qui s'écrit matriciellement comme suit. Notons $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ les composantes de la section s dans ce repère. Alors les composantes de ∇s sont données par

$$\nabla U = dU + \Gamma U$$

où Γ est une matrice de 1-formes, c'est la matrice de la connexion *dans le champ de repères $(s_1, \ldots, s_n)$.*

Remarque 1.5 *On change de champ de repères. On note g la matrice de passage (contenant les composantes des vecteurs s'_j du nouveau repère dans l'ancien). La matrice de la connexion dans le nouveau repère est*

$$\Gamma' = g^{-1}dg + g^{-1}\Gamma g.$$

Voir exercice **??** du chapitre 3.

1.3 Connexion induite

Définition 1.6 *Soit ξ un fibré lisse sur M muni d'une connexion ∇ et $f : M' \to M$ une application lisse. Le fibré induit $f^*\xi$ hérite d'une* connexion induite *(`induced connection`) $f^*\nabla$ définie comme suit. Soit $(s_1, \ldots, s_n)$ un champ de repères local de ξ, dans laquelle ∇ a une matrice Γ. Alors $s'_1 = s_1 \circ f, \ldots, s'_n = s_n \circ f$ est un champ de repères local de $f^*\xi$ dans lequel la matrice de $f^*\nabla$ s'écrit $f^*\Gamma$.*

La définition est compatible avec un changement de repère de ξ (car $d(g \circ f) = f^*dg$). Par construction, si s est une section de ξ et $s' = s \circ f$ la section de f^* induite, alors pour tout vecteur tangent $w \in TM'$,

$$(f^*\nabla)_w s' = \nabla_{df(w)} s. \tag{1}$$

Exemple 1.7 *Soit ∇ une connexion sur le fibré tangent de M et $c : \mathbf{R} \to M$ une courbe paramétrée. Pour dériver des champs de vecteurs le long de c, il faut utiliser la connexion induite sur le fibré c^*TM sur $\mathbf{R}$.*

La formule 1 justifie l'abus de notation fréquent $\nabla_{c'(t)}V$ pour $(c^*\nabla)_{\frac{d}{dt}}V$.

1.4 Transport parallèle

Définition 1.8 *Soit ∇ une connexion sur un fibré ξ sur M. Soit c une courbe paramétrée dans M. Etant donné une section $e \in \xi_{\gamma(0)}$, on appelle* transport parallèle de e le long de c *(`parallel translation along` c) la section s du fibré induit $c^*\xi$ solution de l'équation différentielle*

$$(c^*\nabla)s = 0, \tag{2}$$

telle que $s(0) = e$. Dans un champ de repères local induit d'un champ de repères local de ξ, il s'agit d'une equation différentielle linéaire du premier ordre $U' = -f^*\Gamma U$. Il y a donc une unique solution $t \mapsto U(t)$. Lorsque la courbe c est un lacet d'origine b, le transport parallèle définit un endomorphisme de la fibre ξ_b, appelé holonomie *(`holonomy`) de c.*

1.5 Construction de connexions

Une connexion sur des fibrés vectoriels ξ et ξ' détermine une connexion sur $\xi \oplus \xi'$ (de sorte que $\nabla^{\xi\oplus\xi'}(s + s') = \nabla s + \nabla' s'$), une connexion sur $\xi \otimes \xi'$ (de sorte que $\nabla^{\xi\otimes\xi'}(s \otimes s') = (\nabla s) \otimes s' + s \otimes \nabla' s'$), sur le fibré dual ξ^* (de sorte que $d\langle s, s^*\rangle = \langle \nabla s, s^*\rangle + \langle s, \nabla^* s^*\rangle$, sur $\Lambda^*\xi$ (de sorte que $\nabla^{\Lambda^*}(s \wedge s') = \nabla^{\Lambda^*} s \wedge s' + s \wedge \nabla^{\Lambda^*} s'$), etc... Les objets qui annulent ces connexions sont dits *parallèles*.

Exemple 1.9 *Si g est une structure euclidienne sur les fibres de ξ,*

$$(\nabla g)(s, s') = d\, g(s, s') - g(\nabla s, s') - g(s, \nabla s').$$

Si $\nabla g = 0$, on dit que la structure euclidienne g est parallèle.

Exemple 1.10 *Un fibré vectoriel complexe de rang n muni d'une connexion, c'est la même chose qu'un fibré vectoriel réel de rang n muni d'une connexion et d'une structure complexe parallèle.*

Exercice 1 *Soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel ξ. On fixe un champ de repères local de ξ, dans lequel la matrice de ∇ est Γ. Montrer que la matrice de la connexion sur le fibré $End(\xi)$ dans le champ de repères induit est $ad_\Gamma : End(\xi) \to End(\xi)$, $F \mapsto \Gamma F - F\Gamma$.*

1.6 Connexions et sous-fibrés

Définition 1.11 *Soit ξ un fibré vectoriel muni d'une connexion. Soit $\eta \subset \xi$ un sous-fibré vectoriel. On dit que η est* parallèle *si $\nabla\eta \subset \eta$, i.e. si pour toute section s de η et tout vecteur tangent w, $\nabla_w s \in \eta$.*

Si η n'est pas parallèle, on a besoin, pour définir une connexion induite, de choisir un sous-fibré supplémentaire η', de sorte que $\xi = \eta \oplus \eta'$. Par exemple, supposons ξ muni d'une structure euclidienne parallèle. Si $p \in Hom(\xi, \eta)$ désigne le projecteur orthogonal sur η, on définit la *connexion projetée* sur η par

$$\nabla^\eta s = p(\nabla s).$$

La structure euclidienne restreinte à η reste parallèle. L'orthogonal $\eta^\perp$ hérite aussi d'une connexion projetée. Pour la connexion somme directe des connexions projetées, les sous-fibrés η et $\eta^\perp$ sont parallèles. Cette connexion ne coïncide donc pas avec ∇, en général.

Exemple 1.12 *La connexion de Levi-Civita sur une sous-variété $N \subset M$ d'une variété riemannienne est obtenue ainsi, par projection orthogonale de la connexion de Levi-Civita de M.*

Exemple 1.13 *On fixe une structure euclidienne sur $\mathbf{R}^{n+k}$. Le fibré tautologique $\gamma^n(\mathbf{R}^{n+k})$ sur $G_n(\mathbf{R}^{n+k}$ possède une connexion projetée du fibré trivial $\mathbf{R}^{n+k}$. Soit X le sous-espace $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{n+k}$, muni de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$. On utilise comme carte locale de la grassmannienne au voisinage de X l'application qui à une application linéaire $L : X \to X^\perp$ de matrice L associe son graphe. Dans le champ de repères local $(e_1 + L(e_1), \dots, e_n + L(e_n))$, la matrice de la connexion projetée s'écrit*

$$\Gamma = (1 + L^\top L)^{-1/2} L^\top dL.$$

Preuve. Notons $G : X \to \mathbf{R}^{n+k}$ le graphe de L. Sa matrice (à $n+k$ lignes et n colonnes) est

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ L \end{pmatrix}$$

Le champ de repères local du fibré tautologique est $G \mapsto (G(e_1), \dots, G(e_n))$. La connexion ∇^0 sur le fibré trivial $\mathbf{R}^{n+k}$ est simplement la dérivation, donc

$$\nabla^0 G(e_i) = dG(e_i).$$

Si p_G est la projection orthogonale sur l'image de G, la connexion projetée est

$$\nabla e_i = p_G(\nabla^0 e_i) = p_G dG(r_i).$$

La matrice du projecteur orthogonal p_G est $G(G^\top G)^{-1} G^\top$. La k-ème composante dans la base $G(e_i)_{i=1,\dots,n}$ d'un vecteur de im$G$ s'obtient en le projetant sur X et en gardant la k-ème composante. Par conséquent, la i-ème colonne de la matrice de la connexion ∇ est

$$p_0 G(G^\top G)^{-1} G^\top dG(e_i).$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} \Gamma &= p_0 G(G^\top G)^{-1} G^\top dG \\ &= (G^\top G)^{-1} G^\top dG \\ &= (1 + L^\top L)^{-1} L^\top dL. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exercice 2 *On fixe une structure hermitienne sur $\mathbf{C}^{n+k}$. Le fibré tautologique $\gamma^n(\mathbf{C}^{n+k})$ sur $\mathbf{C}P^n$ possède une connexion projetée du fibré trivial $\mathbf{C}^{n+1}$. Soit X le sous-espace de $\mathbf{C}^n \subset \mathbf{C}^{n+k}$, muni de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$. Ecrire la matrice de cette connexion dans le champ de repères local $(e_1(X'), \dots, e_n(X'))$ défini au voisinage de X, tel que la projection orthogonale de $e_i(X')$ soit e_i.*

1.7 Connexions équivalentes

Définition 1.14 *Soient ξ et ξ' deux fibrés vectoriels sur M. Soit i un isomorphisme de ξ' sur ξ, i.e. une section de $Hom(\xi,\xi')$ qui est partout inversible. Soit ∇ une connexion sur ξ. La* connexion image réciproque *de ∇ par i est définie, pour toute section s' de ξ', par*

$$i^{-1}(\nabla)s' = i^{-1}\nabla(i(s')).$$

Dans le cas particulier où i est un automorphisme de ξ, la matrice Γ' de $i^{-1}(\nabla)$ dans un champ de repères local se déduit de celle Γ de ∇ et de celle A de i par

$$\Gamma' = A^{-1}dA + A^{-1}\Gamma A.$$

En effet, soit S la colonne des composantes d'une section s. Alors $i(\nabla)s$ a pour composantes

$$A^{-1}(d+\Gamma)(AS) = dS + (A^{-1}dA + A^{-1}\Gamma A)S.$$

Le groupe $Aut(\xi)$ agit donc sur les connexions sur ξ.

Définition 1.15 *On dit que deux connexions sont* équivalentes *(`gauge equivalent`) si l'une est l'image réciproque de l'autre par un automorphisme.*

Deux connexions équivalentes donnent, pour les lacets basés en un point b, des holonomies conjuguées.

1.8 Fibré plat associé à une représentation du groupe fondamental

Une connexion sur un fibré vectoriel ξ est *localement triviale* si, au voisinage de chaque point, elle est équivalente à la connexion triviale. On va décrire comment construire toute connexion localement triviale.

Définition 1.16 *Soit M une variété, soit $\rho : \pi_1(M) \to Gl(n,\mathbf{R})$ une représentation linéaire du groupe fondamental de M. On construit un fibré ξ_ρ de rang n sur M, appelé* fibré plat associé à ρ, *comme suit. L'espace total $E(\xi_\rho)$ est le quotient de $\tilde{M} \times \mathbf{R}^n$ par l'action produit de ρ et de l'action du groupe fondamental sur le revêtement universel $\tilde{M}$. La projection $\tilde{\pi} : \tilde{M} \times \mathbf{R}^n \to \tilde{M}$ passe au quotient en $\pi : E(\xi_\rho) \to M$, qui fait de $E(\xi_\rho)$ un fibré vectoriel.*

La connexion triviale sur $\tilde{M} \times \mathbf{R}^n$ passe au quotient en une connexion localement triviale sur ξ. Si l'image de ρ est contenue dans le groupe orthogonal, le fibré ξ hérite d'une structure euclidienne parallèle.

Exemple 1.17 *Soit $M = \mathbf{R}P^1$. Son groupe fondamental est $\mathbf{Z}$. Le revêtement universel est $\mathbf{R} \to \mathbf{R}P^1$, $t \mapsto$ la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix}\cos(\pi t)\\ \sin(\pi t)\end{pmatrix}$ dans $\mathbf{R}^2$. Pour $t > 0$, soit $\rho_t : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^* = Gl(1,\mathbf{R})$ la représentation telle que $\rho(1) = -t$. Alors le fibré plat ξ_{ρ_t} associé est isomorphe au fibré tautologique.*

Lorsque t varie, on obtient des connexions non équivalentes. En effet, l'holonomie du lacet $\mathbf{R}P^1$ lui-même est $\rho_t(1)$.

Remarque 1.18 *La connexion localement triviale associée à la représentation* ρ_1 *est équivalente à la connexion sur le fibré tautologique* γ_1^1 *sur* $\mathbf{R}P^1$ *introduite en 1.13.*

Remarque 1.19 *Plus généralement, dans un fibré plat* ξ_ρ *muni de la connexion localement triviale, l'holonomie le long d'un lacet ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet, et permet de reconstruire la représentation* ρ*. Deux représentations donnent donc des connexions équivalentes si et seulement si elles sont conjuguées dans le groupe linéaire.*

Proposition 1.20 *Soit* ∇ *une connexion localement triviale sur un fibré* ξ *sur une variété* M*. Alors* ∇ *est équivalente à la connexion naturelle sur le fibré plat associé à une représentation* $\rho : \pi_1(M) \to Gl(n, \mathbf{R})$*.*

Preuve. Tant qu'on reste dans un ouvert sur lequel la connexion est isomorphe à une connexion triviale, le transport parallèle ne dépend pas du chemin choisi. Par conséquent, l'holonomie le long de deux lacets suffisamment proches est la même. L'holonomie en $b \in M$ passe donc au quotient en une représentation $\rho : \pi_1(M, b) \to Gl(\xi_b) = Gl(n, \mathbf{R})$.

Soit $\tilde{\xi} = p^*\xi$ le fibré induit par le revêtement universel $p : \tilde{M} \to M$, muni de la connexion induite $\tilde{\nabla}$. Alors $\tilde{\nabla}$ est localement triviale. Comme $\tilde{M}$ est simplemennt connexe, l'holonomie de $\tilde{\nabla}$ est triviale, donc le transport parallèle entre deux points ne dépend pas du chemin suivi. Cela permet de construire un champ de repères de sections parallèles globales (des sections parallèles indépendantes en un point le sont partout). Autrement dit, $\tilde{\nabla}$ est triviale : il existe un isomorphisme $h : E(\tilde{\xi}) \to \tilde{M} \times \mathbf{R}^n$ envoyant $\tilde{\nabla}$ sur la connexion triviale.

Soit $g \in \pi_1(M, b)$ une transformation de revêtement. Alors g se prolonge en un difféomorphisme $\phi(g)$ de l'espace total $E(\tilde{\xi})$ qui envoie linéairement fibre sur fibre. En effet, les fibres de $\tilde{\xi}$ en $\tilde{Q}$ et $g(\tilde{Q}) \in \tilde{M}$ coïncident par définition avec $\xi_{p(\tilde{Q})}$. L'espace total $E(\xi)$ s'obtient en quotientant $E(\tilde{\xi})$ par cette action $\phi : \pi_1(M, b) \to Diff(E(\tilde{\xi}))$.

Le difféomorphisme $h \circ \phi(g) \circ h^{-1} : \tilde{M} \times \mathbf{R}^n \to \tilde{M} \times \mathbf{R}^n$ est de la forme

$$h \circ \phi(g) \circ h^{-1}(\tilde{Q}, v) = (g(\tilde{Q}), f_g(\tilde{Q})(v))$$

où $f_g(\tilde{Q}) \in Gl(n, \mathbf{R})$. Si on fixe une fois pour toutes un point $\tilde{b} \in p^{-1}(b)\tilde{M}$, alors

$$\rho : \pi_1(M, b) \to Gl(n, \mathbf{R}), \quad g \mapsto f_g(b)$$

est un homéomorphisme de groupes. On a donc montré que $E(\xi)$ s'obtient en quotientant $\tilde{M} \times \mathbf{R}^n$ par l'action diagonale de $\pi_1(M, b)$. Par construction, cette opération préserve les sections parallèles, donc ∇ est isomorphe à la connexion naturelle sur le fibré quotient. ∎

2 Courbure

2.1 Différentielle des formes à valeurs vectorielles

Une connexion sur une fibré lisse ξ permet d'étendre la différentielle extérieure d des formes différentielles aux formes différentielles à valeurs dans ξ.

Définition 2.1 *Soit ξ un fibré lisse sur une variété M. Une k-forme à valeurs dans ξ est une section de $\Lambda^k T^*M \otimes \xi$.*

Dans un champ de repères local (s_i) de ξ, une k-forme à valeurs dans ξ s'écrit comme une colonne U de k-formes différentielles. Un changement de repère de matrice de passage g change la colonne U en $U' = g^{-1}U$.

Exemple 2.2 *Soit ∇ une connexion sur ξ et s une section de ξ. Alors ∇s est une 1-forme différentielle à valeurs dans ξ.*

Exemple 2.3 *Soient ∇ et ∇' deux connexions sur un même fibré ξ. Alors la différence $\nabla' - \nabla$ est une 1-forme différentielle à valeurs dans $End(\xi)$.*

Définition 2.4 *Soit ω une k-forme à valeurs dans ξ. Sa différentielle $d^\nabla \omega$ est la $k+1$-forme à valeurs dans ξ dont les composantes dans un champ de repères local sont données par*

$$d^\nabla U = dU + \Gamma U$$

où, lorsqu'on multiplie deux matrices dont les coefficients sont des formes différentielles, on utilise le produit extérieur.

Un changement de repère de matrice de passage g change U en $U' = g^{-1}U$ et Γ en $\Gamma' = g^{-1}dg + g^{-1}\Gamma g$ donc $d^\nabla U$ en

$$\begin{aligned} dU' + \Gamma' U' &= d(g^{-1}U) + (g^{-1}dg + g^{-1}\Gamma g)g^{-1}U \\ &= -g^{-1}dg\, g^{-1}U + g^{-1}dU + g^{-1}dg\, g^{-1}U + g^{-1}\Gamma U \\ &= g^{-1}(dU + \Gamma U) \end{aligned}$$

comme il sied à une $k+1$-forme à valeurs dans ξ.

Lemme 2.5 *Soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel ξ sur M. Soit α une 1-forme à valeurs dans ξ. Soient V et W des champs de vecteurs sur M. Alors*

$$(d^\nabla \alpha)(V, W) = \nabla_V(\alpha(W)) - \nabla_W(\alpha(V)) - \alpha([V, W]).$$

Preuve. Soit U la colonne des composantes de α dans un champ de repères local. Alors

$$\begin{aligned} (d^\nabla \alpha)(V, W) &= (dU + \Gamma U)(V, W) \\ &= d(U(W))(V) - d(U(V))(W) - U([V, W]) \\ &\quad + \Gamma(V)U(W) - \Gamma(W)U(V). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\nabla_V(\alpha(W)) = d(U(W))(V) + \Gamma(V)U(W)$$

donc

$$(d^\nabla \alpha)(V,W) = \nabla_V(\alpha(W)) - \nabla_W(\alpha(V)) - \alpha([V,W]). \blacksquare$$

Exercice 3 *Soit ∇ une connexion sur le fibré tangent TM. Interprétons l'identité*

$$Id \in Hom(TM,TM) = T^*M \otimes TM$$

comme une 1-forme à valeurs dans TM. Montrer que la 2-forme à valeurs dans TM $d^\nabla Id$ coïncide avec la torsion de ∇.

Exemple 2.6 *Plus généralement, soit $f : M \to N$ une application lisse. On suppose le fibré tangent TN muni d'une connexion ∇^N, et on équipe le fibré induit f^*TN de la connexion induite ∇. La différentielle df de f s'interprète comme une 1-forme à valeurs dans f^*TN. Elle satisfait*

$$d^\nabla df = f^*T^{\nabla^N}.$$

En effet, $df = f^*Id$. Comme la connexion est induite par f,

$$d^\nabla f^*Id = f^*d^\nabla Id = f^*T^{\nabla^N}.$$

Exercice 4 *Soit ξ un fibré vectoriel muni d'une connexion ∇ et d'un champ de repères local dans lequel la matrice de ∇ est Γ. Soit ϕ une k-forme à valeurs dans $End(\xi)$, représentée par une matrice F de k-formes. Vérifier que $d^\nabla \phi$ est représentée par*

$$dF + \Gamma F - (-1)^k F\Gamma.$$

Exercice 5 *Soit ξ un fibré vectoriel muni d'une connexion ∇. Soit σ une ℓ-forme à valeurs dans ξ et ϕ une k-forme à valeurs dans $End(\xi)$. On peut multiplier ϕ avec σ pour obtenir une $k+\ell$-forme à valeurs dans ξ. Vérifier que*

$$d^\nabla(\phi\sigma) = (d^\nabla \phi)\sigma + (-1)^k \phi(d^\nabla \sigma).$$

2.2 Courbure

Contrairement à la différentielle extérieure des formes ordinaires, on n'a pas $d^\nabla \circ d^\nabla = 0$ en général. Le terme d'erreur est la courbure.

Définition 2.7 *Soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel ξ. L'opérateur différentiel $R^\nabla = d^\nabla \circ d^\nabla$ est d'ordre 0. C'est donc une 2-forme à valeurs dans $End(\xi)$. On l'appelle la* courbure *de la connexion ∇.*

Dans un champ de repères, soit s une section dont les composantes constituent une colonne S. Alors

$$\begin{aligned} d^{\nabla}\circ d^{\nabla}s &= (d+\Gamma)(dS+\Gamma S) \\ &= \Gamma dS + d(\Gamma S) + \Gamma\Gamma S \\ &= \Gamma dS + (d\Gamma)S - \Gamma dS + \Gamma\Gamma S \\ &= (d\Gamma + \Gamma\Gamma)S \end{aligned}$$

où le signe moins provient de la règle $d(\alpha\wedge\beta) = (d\alpha)\wedge\beta - \alpha\wedge(d\beta)$ si α est une 1-forme. Il vient

$$R^{\nabla} = d\Gamma + \Gamma\Gamma.$$

Si on change de repère, la courbure, comme matrice de 2-formes, change comme suit

$$d\Gamma' + \Gamma'\Gamma' = g^{-1}(d\Gamma + \Gamma\Gamma)g$$

où g est la matrice de passage.

Exercice 6 *Vérifier que le tenseur de courbure riemannien, vu comme 2-forme à valeurs dans $End(TM)$, est bien la courbure de la connexion de Levi-Civita au sens de la définition 2.7.*

Exemple 2.8 *La courbure de la connexion triviale est nulle. Par conséquent, la courbure d'une connexion localement triviale (voir en 1.16) est identiquement nulle.*

Exemple 2.9 *La courbure de la connexion projetée sur le fibré tautologique sur la grassmannienne $G_n(\mathbf{R}^{n+k})$ vaut*

$$R^{\nabla} = -(1+L^{\top}L)^{-1}dL^{\top}L(1+L^{\top}L)^{-1}L^{\top}dL + (1+L^{\top}L)^{-1}dL^{\top}dL.$$

Autrement dit, en un point X de la grassmannienne représentant un sous-espace de dimension n de $\mathbf{R}^{n+k}$, étant donnés deux vecteurs

$V,\, W \in T_X G_n(\mathbf{R}^{n+k}) = Hom(X, X^{\perp}), \quad R^{\nabla}(V,W) = V^{\top}W - W^{\top}V \in End(X).$

En effet, avec les notations de l'exemple 1.13, la matrice de la connexion s'écrit

$$\Gamma = (1+L^{\top}L)^{-1}L^{\top}dL,$$

d'où

$$\begin{aligned} R^{\nabla} &= d\Gamma + \Gamma\Gamma \\ &= -(1+L^{\top}L)^{-1}(dL^{\top}L + L^{\top}dL)(1+L^{\top}L)^{-1}L^{\top}dL + (1+L^{\top}L)^{-1}dL^{\top}dL \\ &\quad +(1+L^{\top}L)^{-1}L^{\top}dL(1+L^{\top}L)^{-1}L^{\top}dL \\ &= -(1+L^{\top}L)^{-1}dL^{\top}L(1+L^{\top}L)^{-1}L^{\top}dL + (1+L^{\top}L)^{-1}dL^{\top}dL. \end{aligned}$$

Par conséquent, au point X,

$$R^{\nabla} = dL^{\top}dL,$$

ce qui se traduit par

$$R^{\nabla}(V,W) = V^{\top}W - W^{\top}V \in End(X).$$

Exercice 7 *Vérifier que, dans une carte affine $z \mapsto [1:z]$, la courbure de la connexion projetée sur le fibré tautologique sur l'espace projectif complexe $\mathbf{C}P^1$ vaut*

$$(1+z\bar{z})^{-2} d\bar{z} \wedge dz.$$

Remarque 2.10 *Dès que $n > 1$, la courbure de la connexion projetée sur le fibré tautologique sur la grassmannienne $G_n(\mathbf{R}^{n+k})$ est non nulle. Par conséquent, cette connexion n'est pas localement triviale.*

Exemple 2.11 *Soit $f : M' \to M$ une application lisse. Soit ξ un fibré vectoriel lisse sur M, muni d'une connexion ∇. Alors la courbure de la connexion induite $f^*\nabla$ sur $f^*\xi$ est f^*R^∇.*

Exemple 2.12 *La courbure de la connection somme directe $\nabla \oplus \nabla'$ sur $\xi \oplus \xi'$ est $\begin{pmatrix} R^\nabla & 0 \\ 0 & R^{\nabla'} \end{pmatrix}$.*

Remarque 2.13 *Soit a un automorphisme du fibré ξ. La courbure de la connexion image $a(\nabla)$ est $ad_a(R^\nabla)$.*

Cela s'écrit, dans un champ de repères local,

$$R^{a(\nabla)} = A^{-1} R^\nabla A$$

Exercice 8 *Soient ξ et ξ' deux fibrés vectoriels sur M, munis de connexions ∇ et ∇'. Vérifier que la courbure de la connexion produit tensoriel est*

$$R^{\nabla \otimes \nabla'} = R^\nabla \otimes 1 + 1 \otimes R^{\nabla'}.$$

2.3 Identités de Bianchi

Proposition 2.14 *Soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel ξ. Alors*

$$d^\nabla R^\nabla = 0. \tag{3}$$

Soit ∇ une connexion sur le fibré tangent TM. Notons T^∇ sa torsion. Soit

$$A^3 R : (v, w, z) \mapsto R_{v,w} z + R_{w,z} v + R_{z,v} w$$

le tenseur de courbure antisymétrisé. Alors

$$A^3 R = R^\nabla Id = d^\nabla T^\nabla. \tag{4}$$

Preuve. Soit s une section de ξ. D'après l'exercice 5,

$$d^\nabla (R^\nabla s) = (d^\nabla R^\nabla) s + R^\nabla (d^\nabla s).$$

Or

$$\begin{aligned} d^\nabla(R^\nabla s) &= d^\nabla \circ d^\nabla \circ d^\nabla(s) \\ &= (d^\nabla \circ d^\nabla)(d^\nabla s) \\ &= R^\nabla(d^\nabla s) \end{aligned}$$

donc $(d^\nabla R^\nabla)s = 0$.

L'identité $A^3 R = R^\nabla Id$ résulte de la définition du produit extérieur des 2-formes avec les 1-formes, et $R^\nabla Id = d^\nabla T^\nabla$ de l'exercice 3. ∎

Exercice 9 *Vérifier que l'*identité de Bianchi différentielle $d^\nabla R^\nabla = 0$*, pour la courbure d'une variété riemannienne, se traduit par*

$$(\nabla_v R)_{w,z} + (\nabla_w R)_{z,v} + (\nabla_z R)_{v,w} = 0$$

pour tous vecteurs tangents v, w et z.

2.4 Cas des fibrés de rang 1

Si ξ est un fibré (réel ou complexe) de rang 1, alors $End(\xi)$ est trivial, ainsi que sa connexion. Par conséquent

- les automorphismes du fibré ξ s'identifient aux applications $M \to \mathbf{R}^*$ (resp $\mathbf{C}^*$) et agissent trivialement sur la courbure ;
- la différence de deux connexions est une 1-forme différentielle ordinaire (à valeurs réelles ou complexes) ;
- la courbure R^∇ est une 2-forme différentielle ordinaire ;
- d'après l'identité de Bianchi (formule 3), R^∇ est fermée.

Proposition 2.15 *Soit ∇ une connexion sur un fibré ξ de rang 1 sur une variété M. Soit $u : \bar{D} \to M$ une application du disque unité fermé vers M. Alors l'holonomie de ∇ sur le lacet $u(\partial D)$ ne dépend pas du point b choisi dessus, c'est la multiplication par* $\exp(-\int_{u(D)} R^\nabla)$ *dans la fibre ξ_b.*

Preuve. On peut remplacer M par $\bar{D}$, ξ et ∇ par le fibré $u^*\xi$ et la connexion induite $u^*\nabla$. Comme $\bar{D}$ est contractile, $u^*\xi$ est trivial. Dans un champ de repères, la matrice Γ de la connexion satisfait

$$R^\nabla = d\Gamma + \Gamma\Gamma = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = d\Gamma,$$

car le produit extérieur d'une 1-forme avec elle-même est nul. L'équation du transport parallèle le long du bord est

$$\frac{ds}{dt} + \Gamma(\frac{d}{dt})s = 0,$$

elle admet pour solution

$$\begin{aligned} s(t) &= s(0)\exp(-\int_0^t \Gamma(\frac{d}{dt})\,dt) \\ &= s(0)\exp(-\int_{[0,t]} \Gamma) \end{aligned}$$

donc l'holonomie le long du bord est la multiplication par

$$\exp(-\int_{\partial D} \Gamma) = \exp(-\int_D R^\nabla). \blacksquare$$

Proposition 2.16 *Soit ∇ une connexion sur un fibré ξ de rang 1. La courbure R^∇ est identiquement nulle si et seulement si ∇ est localement triviale.*

Preuve. Supposons que $R^\nabla = 0$. Dans un champ de repères local, la matrice Γ de la connexion satisfait

$$0 = R^\nabla = d\Gamma.$$

Localement, il existe une fonction b telle que $db = \Gamma$. Alors $a = \exp(-b)$ définit un automorphisme (local) du fibré ξ, et la connexion $a(\nabla)$ a pour matrice (voir en 1.14)

$$\Gamma' = a^{-1}da + a^{-1}\Gamma a = -db + \Gamma = 0.$$

Autrement dit, $a(\nabla)$ est triviale, donc ∇ est localement triviale. $\blacksquare$

Proposition 2.17 *Soit ∇ une connexion sur un fibré ξ de rang 1. La classe de cohomologie $c(\xi,\nabla)$ de la 2-forme fermée R^∇ ne dépend pas du choix de connexion. C'est donc un invariant d'isomorphisme lisse $c(\xi)$ du fibré ξ. Si $f : M' \to M$ est une application lisse, alors $c(f^*\xi, f^*\nabla) = f^*c(\xi,\nabla)$ donc c est une classe caractéristique.*

Preuve. Soient ∇, ∇' deux connexions sur le même fibré vectoriel ξ. Alors $\nabla' - \nabla$ est une 1-forme différentielle globalement définie. Dans un champ de repères local, elle s'écrit $\Gamma' - \Gamma$. Par conséquent

$$d(\nabla' - \nabla) = d(\Gamma' - \Gamma) = R^{\nabla'} - R^\nabla.$$

Cela prouve que les 2-formes R^∇ et $R^{\nabla'}$ définissent la même classe de cohomologie dans $H^2(M,\mathbf{R})$.

La naturalité sous les applications lisses résulte de 2.11. Sachant que la classification des fibrés lisses est identique à celle des fibrés topologiques, la naturalité sous les applications lisses entraîne la naturalité en général, donc c est une classe caractéristique. $\blacksquare$

Dans le cas des fibrés vectoriels réels, la classe c est nulle. En effet, elle est nulle dans le cas du fibré tautologique γ_1^1 sur $\mathbf{R}P^1$ donc aussi pour le fibré universel $\gamma^1(\mathbf{R}^\infty)$, donc pour tous les fibrés réels de rang 1.

Dans le cas des fibrés vectoriels complexes, on verra plus loin que $c = -2i\pi c_1$.

L'objet de la suite du chapitre est de généraliser les trois observations 2.15, 2.16 et 2.17 aux fibrés de dimension supérieure.

3 Théorie de Chern-Weil

3.1 Polynômes invariants

Définition 3.1 *Un polynôme P sur l'espace vectoriel $M(n, \mathbf{C})$ des matrices $n \times n$ à coefficients complexes est dit* invariant *si, pour tous $g \in Gl(n, \mathbf{C})$ et $h \in M(n, \mathbf{C})$,*

$$P(g^{-1}hg) = P(h).$$

Lemme 3.2 *Soient $P_1, \ldots, P_n$ les polynômes sur $M(n, \mathbf{C})$ définis par l'identité*

$$\det(\lambda I - \frac{1}{2i\pi}h) = \lambda^n + P_1(h)\lambda^{n-1} + \cdots + P_n(h).$$

Par exemple, $P_1(h) = -\frac{1}{2i\pi}\mathrm{trace}(h)$ et $P_n(h) = (-\frac{1}{2i\pi})^n \det(h)$. Alors $P_1, \ldots, P_n$ sont algébriquement indépendants et engendrent l'algèbre des polynômes invariants sur $M(n, \mathbf{C})$.

Preuve. On remarque que les fonctions P_k sont des polynômes invariants sur $M(n, \mathbf{C})$. Lorsqu'on les évalue sur une matrice diagonale, on trouve que

$$P_k(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = (-\frac{1}{2i\pi})^k \sigma_k$$

où σ_k est la k-ème fonction symétrique élémentaire évaluée sur $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Inversement, soit P un polynôme invariant sur $M(n, \mathbf{C})$. Sa restriction au sous-espace vectoriel des matrices diagonales $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est un polynôme $Q = Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. A chaque permutation σ de $1, \ldots, n$ correspond une matrice de permutation $g_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})_{i,j=1,\ldots,n}$ qui satisfait

$$g_\sigma^{-1} \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) g_\sigma = \mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)}).$$

Par invariance, $Q(\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)}) = Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, donc le polynôme Q est symétrique. Il s'écrit donc de manière unique comme polynôme en les fonctions symétriques élémentaires

$$Q = R(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Par conséquent, P coïncide avec le polynôme invariant

$$\tilde{P} = R(-2i\pi P_1, \ldots, (-2i\pi)^n P_n)$$

sur les matrices diagonales.

Soit $h \in M(n, \mathbf{C})$ une matrice diagonalisable. Alors il existe $g \in Gl(n, \mathbf{C})$ tel que $g^{-1}hg = \delta$ soit diagonale. Par invariance, $P(h) = \tilde{P}(h)$. Comme les matrices diagonalisables sont denses, $P = \tilde{P}$. On a montré que P s'écrit uniquement comme un polynôme en les P_i. ■

Remarque 3.3 *Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n. Tout polynôme invariant P sur $M(n, \mathbf{C})$ détermine un polynôme sur $End(E)$, indépendant d'un choix de base. En particulier, si ξ est un fibré vectoriel complexe de rang n, P définit une fonction à valeurs complexes sur l'espace total du fibré $End(\xi)$.*

3.2 Homomorphisme de Weil

Proposition 3.4 *Soit ξ un fibré vectoriel complexe de rang n sur M, muni d'une connexion ∇. Soit P un polynôme invariant sur $M(n, \mathbf{C})$. Alors la forme différentielle à valeurs complexes $P(R^\nabla)$ est fermée. Sa classe de cohomologie de de Rham ne dépend pas du choix de connexion.*

*L'application $P \mapsto [P(R^\nabla)] \in H^*(M, \mathbf{C})$ s'appelle l'*homomorphisme de Weil.

Preuve. On peut supposer P homogène de degré k (en effet, les composantes homogènes d'une polynôme invariant sont invariantes). D'après le lemme 5, la différentielle extérieure d^∇ est une dérivation de l'algèbre des formes différentielles de degrés pairs à valeurs dans $End(\xi)$. Soit F la forme k-linéaire symétrique sur $M(n, \mathbf{C})$ telle que $P(h) = F(h, \ldots, h)$. Alors

$$\begin{aligned} d\,P(R^\nabla) &= d^\nabla P(R^\nabla) \\ &= d^\nabla F(R^\nabla, \ldots, R^\nabla) \\ &= F(d^\nabla R^\nabla, R^\nabla, \ldots, R^\nabla) + \cdots + F(R^\nabla, \ldots, d^\nabla R^\nabla) \\ &= 0. \end{aligned}$$

car, d'après l'identité de Bianchi 2.14, $d^\nabla R^\nabla = 0$.

Soit ∇' une autre connexion sur ξ. Alors $\Gamma = \nabla' - \nabla$ est une 1-forme à valeurs dans $End(\xi)$, et $\nabla_t = \nabla + t\Gamma$ est, pour tout t, une connexion sur ξ. On vérifie que

$$\frac{d}{dt} R^{\nabla_t} = d^{\nabla_t}\Gamma.$$

En effet, pour toute section s de ξ

$$\frac{d}{dt} d^{\nabla_t} s = \Gamma s,$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} d^{\nabla_t} d^{\nabla_t} s &= \Gamma d^{\nabla_t} s + d^{\nabla_t}(\Gamma s) \\ &= \Gamma d^{\nabla_t} s + (d^{\nabla_t}\Gamma) s - \Gamma d^{\nabla_t} s \\ &= (d^{\nabla_t}\Gamma) s. \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(R^{\nabla_t}) &= \frac{d}{dt} F(R^{\nabla_t}, \ldots, R^{\nabla_t}) \\ &= F(d^{\nabla_t}\Gamma, R^{\nabla_t}, \ldots, R^{\nabla_t}) + \cdots + F(R^{\nabla_t}, \ldots, d^{\nabla_t}\Gamma) \\ &= k\,F(d^{\nabla_t}\Gamma, R^{\nabla_t}, \ldots, R^{\nabla_t}). \end{aligned}$$

D'autre part, comme $d^{\nabla_t} R^{\nabla_t} = 0$,

$$\begin{aligned} d\,F(\Gamma, R^{\nabla_t}, \ldots, R^{\nabla_t}) &= F(d^{\nabla_t}\Gamma, R^{\nabla_t}, \ldots, R^{\nabla_t}) \\ &= \frac{1}{k} \frac{d}{dt} P(R^{\nabla_t}). \end{aligned}$$

Il vient

$$P(R^{\nabla'}) - P(R^{\nabla}) = d(k\int_0^1 F(\Gamma, R^{\nabla_t}, \ldots, R^{\nabla_t})\, dt). \blacksquare$$

Corollaire 3.5 *L'homomorphisme de Weil associe à chaque polynôme invariant P sur $M(n, \mathbf{C})$ une classe caractéristique c_P pour les fibrés vectoriels complexes de rang n.*

Preuve. C'est clair pour les fibrés lisses. Le fibré tautologique $\gamma^n(\mathbf{C}^{n+k})$ est un fibré lisse sur la grassmannienne $G_n(\mathbf{C}^{n+k})$, donc la classe $c_P(\gamma^n(\mathbf{C}^{n+k}))$ est bien définie. Le plongement $G_n(\mathbf{C}^{n+k}) \to G_n(\mathbf{C}^{n+k+1})$ induit $\gamma^n(\mathbf{C}^{n+k})$ de $\gamma^n(\mathbf{C}^{n+k+1})$, donc, pour $k' \geq k$, la classe $c_P(\gamma^n(\mathbf{C}^{n+k'}))$, restreinte à $G_n(\mathbf{C}^{n+k})$, est indépendante de k'. On peut donc définir sans ambiguïté la classe $c_P(\xi)$ pour un fibré topologique. $\blacksquare$

Théorème 1 *Soit P le polynôme invariant sur $M(n, \mathbf{C})$ défini par*

$$P(h) = \det(I - \frac{1}{2i\pi}h).$$

Alors c_P est la classe de Chern totale.

Preuve. L'axiome de degré est clairement vérifié. La multiplicativité sous les sommes directes résulte de 2.12 et de la formule pour le déterminant des matrices diagonales par blocs. Reste à vérifier la normalisation. Notons $\gamma = (\gamma_1^{1,\mathbf{C}})$ le fibré tautologique sur $\mathbf{C}P^1$. D'après 7, la courbure de γ, dans une carte affine $z \mapsto [1 : z]$, vaut

$$(1 + z\bar{z})^{-2} d\bar{z} \wedge dz.$$

La composante de degré 1 de P est $h \mapsto -\frac{1}{2i\pi}\mathrm{trace}(h)$. Par conséquent, si μ désigne la classe fondamentale en homologie de $\mathbf{C}P^1$,

$$\begin{aligned}
\langle c_P(\gamma), \mu \rangle &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}} (1 + z\bar{z})^{-2} d\bar{z} \wedge dz \\
&= -\frac{1}{2i\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} (1 + r^2)^{-2} 2ir\, dr\, d\theta \\
&= -2\int_0^{+\infty} (1 + r^2)^{-2} r\, dr \\
&= -\int_0^{+\infty} (1 + s)^{-2}\, ds \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $c_P(\gamma) = 1 - h$ où h est la classe fondamentale en cohomologie. $\blacksquare$

Remarque 3.6 *Le théorème 1 prouve entre autres l'existence des classes de Chern. Le fait qu'elles habitent dans la cohomologie entière résulte aisément de la preuve de l'unicité de la classe de Chern : $c_1(\gamma^1(\mathbf{C}^\infty))$ est entière, donc c_1 est à valeurs entières pour tous les fibrés en droites. Le cas général se ramène au cas des fibrés en droites par multiplicativité et grâce au principe de décomposition.*

Exercice 10 *En utilisant la théorie de Chern-Weil, montrer que si ξ et ξ' sont des fibrés vectoriels complexes lisses de rang 1, alors*

$$c_1(\xi \otimes \xi') = c_1(\xi) + c_1(\xi').$$

dans la cohomologie à coefficients réels.

Exercice 11 *En utilisant le fait que $T\mathbf{C}P^1 = \gamma^* \otimes \gamma^*$ où $\gamma = (\gamma_1^{1,\mathbf{C}})$ est le fibré tautologique sur $\mathbf{C}P^1$, donner une autre preuve du fait que le polynôme invariant $P_1 = -\frac{1}{2i\pi}\mathrm{trace}$ satisfait la même normalisation que la première classe de Chern.*

3.3 Caractère de Chern

Notons S la série formelle sur l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients complexes définie par

$$S(h) = \mathrm{trace}(\exp(-\frac{1}{2i\pi}h)).$$

Elle est clairement invariante par l'action adjointe de $Gl(n, \mathbf{C})$. Les identités

$$S(h \oplus h') = S(h) + S(h'), \quad S(h \otimes 1 + 1 \otimes h') = S(h)S(h'),$$

vraies pour des matrices diagonales, sont donc vraies pour des matrices quelconques. Par conséquent, la classe caractéristique associée à la série S par l'homomorphisme de Weil est le caractère de Chern ch, et on a, pour tous fibrés vectoriels complexes ξ et ξ' sur une même base,

$$ch(\xi \oplus \xi') = ch(\xi) + ch(\xi'), \quad ch(\xi \otimes \xi') = ch(\xi) \cup ch(\xi').$$

On le savait déjà. Ce qu'on apprend de plus, c'est que cette identité est vraie au niveau des formes différentielles fournies par l'homomorphisme de Weil, et non seulement au niveau de la cohomologie.

3.4 Classes de Pontrjagin

Proposition 3.7 *Soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel réel ξ. La classe de Pontrjagin totale $p(\xi)$ est représentée par la forme différentielle*

$$p(\xi) = [\det(I - \frac{1}{2\pi}R^\nabla)].$$

Preuve. La connexion ∇ sur ξ détermine une connexion $\nabla^{\mathbf{C}}$ sur le fibré vectoriel complexe $\xi \otimes \mathbf{C}$, dont la courbure est

$$R^{\nabla^{\mathbf{C}}} = R^{\nabla} \otimes \mathbf{C},$$

donc $R^{\nabla^{\mathbf{C}}}$ et R^{∇} ont même polynôme caractéristique. Par conséquent, la forme différentielle

$$P_k(R^{\nabla})$$

est un représentant de $c_k(\xi \otimes \mathbf{C})$ en cohomologie de de Rham, et

$$P_{2k}(iR^{\nabla})$$

est un représentant de $(-1)^k c_{2k}(\xi \otimes \mathbf{C}) = p_k(\xi)$. ∎

Remarque 3.8 *On verra en 3.10 que la forme différentielle $P_{2k+1}(R^{\nabla})$ est nulle si la connexion ∇ préserve une structure euclidienne sur les fibres. En général, on peut seulement affirmer que sa classe de cohomologie est nulle.*

En effet, R^{∇} est une matrice à coefficients réels, donc $P_{2k+1}(R^{\nabla})$ est imaginaire pure. Or sa classe de cohomologie, une classe de Chern, est entière, donc en particulier réelle.

3.5 Fibrés vectoriels réels orientés

Il n'y a pas plus de polynômes sur les matrices réelles invariants sous $Sl(n, \mathbf{R})$ que de polynômes invariants sous $Gl(n, \mathbf{C})$ sur les matrices complexes. Où trouver un nouveau polynôme invariant pour calculer un représentant de la classe d'Euler d'un fibré vectoriel réel orienté de rang pair $n = 2m$? La formule $e(\xi)^2 = p_m(\xi)$ suggère de chercher une racine carrée du déterminant. Un tel polynôme existe pour les matrices antisymétriques. Si on choisit une structure euclidienne sur les fibres, la courbure va devenir antisymétrique.

Remarque 3.9 *Soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel réel ξ qui préserve une structure euclidienne. Dans un champs de repères orthonormés local, la matrice de ∇ et celle de sa courbure R^{∇} sont antisymétriques.*

En effet, dans un champ de repères orthonormés local $(e_1, \ldots, e_n)$,

$$d(e_i \cdot e_j) = (\nabla e_i) \cdot e_j + e_i \cdot (\nabla e_j),$$

donc

$$\Gamma_{ij} = (\nabla e_j) \cdot e_i = -e_i \cdot (\nabla e_j) = -\Gamma_{ji}.$$

3.6 Polynômes invariants sur les matrices antisymétriques

Notons $A_n \subset M(n, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices antisymétriques $n \times n$. Evidemment, les polynômes invariants définis sur toutes les matrices réelles donnent en particulier des polynômes invariants par le groupe orthogonal $O(n)$ sur le sous-espace A_n. Notons que la moitié d'entre eux sont nuls.

Lemme 3.10 *Si h est une matrice réelle antisymétrique de taille n, $P_{n-2k+1}(h) = 0$ pour tout k.*

Preuve. Le polynôme

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - \frac{1}{2i\pi}h) &= \det((\lambda I - \frac{1}{2i\pi}h)^\top) = \det(\lambda I + \frac{1}{2i\pi}h) \\ &= (-1)^n \det(-\lambda I - \frac{1}{2i\pi}h) \end{aligned}$$

est pair (resp. impair, suivant la parité de n), donc ses coefficients d'indices impairs (resp. pairs) sont nuls. ∎

Définition 3.11 *Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension paire $n = 2m$. A chaque endomorphisme antisymétrique a de E correspond une 2-forme $\alpha_a \in \Lambda^2 E^*$ par*

$$\alpha_a(v, w) = a(v) \cdot w.$$

Le produit extérieur $(\alpha_a)^m$ est proportionnel à la forme volume $vol \in \Lambda^n E^*$ de E. On appelle pfaffien *le polynôme* Pf *défini par*

$$\frac{1}{m!}(\alpha_a)^m = \mathrm{Pf}(a)\, vol.$$

De la définition, il résulte que si a préserve une décomposition orthogonale $E = F \oplus F'$ où F et F' sont de dimensions paires et orientés, alors

$$\mathrm{Pf}(a) = \mathrm{Pf}(a_{|F})\mathrm{Pf}(a_{|F'}).$$

D'autre part, $\mathrm{Pf}(a)^2 = \det(a)$.

Dans le cas où $E = \mathbf{R}^n$, le pfaffien est un polynôme $SO(n)$-invariant sur A_n, homogène de degré m.

Proposition 3.12 *Les polynômes P_{2k}, $k = 1, \ldots, [n/2]$, sont algébriquement indépendants sur A_n et engendrent l'algèbre des polynômes $O(n)$-invariants sur A_n. Si n est impair, c'est encore vrai sous $SO(n)$. Si $n = 2m$ est pair, les P_{2k}, $k = 1, \ldots, m$, et le pfaffien engendrent l'algèbre des polynômes $SO(n)$-invariants sur A_n, avec pour relation* $\mathrm{Pf}^2 = (-1)^m (2\pi)^{2m} P_{2m}$.

Preuve. Si n est pair, $n = 2m$, toute matrice antisymétrique est équivalente sous $SO(n)$ à une matrice diagonale par blocs 2×2 de la forme

$$a(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & & & \\ \lambda_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -\lambda_m \\ & & & \lambda_m & 0 \end{pmatrix}.$$

On commence par calculer les valeurs prises par les polynômes invariants connus sur les matrices diagonales par blocs 2×2.

On calcule d'abord

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - \frac{1}{2i\pi} a(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)) &= \prod_{j=1}^{m} \det \begin{pmatrix} \lambda & \frac{\lambda_j}{2i\pi} \\ -\frac{\lambda_j}{2i\pi} & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \prod_{j=1}^{m} (\lambda^2 - \frac{\lambda_j^2}{4\pi^2}) \\ &= \lambda^n + \sigma_1(-\frac{\lambda_1^2}{4\pi^2}, \ldots, -\frac{\lambda_m^2}{4\pi^2})\lambda^{n-2} + \cdots \\ &\quad + \sigma_m(-\frac{\lambda_1^2}{4\pi^2}, \ldots, -\frac{\lambda_m^2}{4\pi^2}) \end{aligned}$$

où les σ_k sont les fonctions symétriques élémentaires. Par conséquent

$$P_{2k}(a(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)) = \sigma_k(-\frac{\lambda_1^2}{4\pi^2}, \ldots, -\frac{\lambda_m^2}{4\pi^2}).$$

La 2-forme associée à $a(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ est $\lambda_1 dx_1 \wedge dx_2 + \cdots + \lambda_m dx_{n-1} \wedge dx_n$. On calcule

$$\begin{aligned} (\lambda_1 dx_1 \wedge dx_2 + \cdots + \lambda_m dx_{n-1} \wedge dx_n)^m &= m! \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= m! \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m \, vol \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{Pf}(a(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m.$$

En particulier,

$$\mathrm{Pf}(a(\lambda_1, \ldots, \lambda_m))^2 = \det(a(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)) = (-1)^m (2\pi)^{2m} P_{2m}(a(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)).$$

Par invariance, cette identité est vraie pour toute matrice antisymétrique.

Soit P un polynôme $SO(n)$-invariant sur A_n, n pair. Alors $Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = P(a(\lambda_1, \ldots, \lambda_m))$ est un polynôme symétrique en $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. En effet, pour toute permutation σ de $1, \ldots, m$, la matrice M de la permutation qui échange $2j-1$ et $2\sigma(j)-1$ et $2j$ et $2\sigma(j)$ appartient à $SO(n)$ et

$$M^{-1} a(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) M = a(\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(m)}).$$

De plus,

$$Q(-\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m) = Q(\lambda_1, \dots, \lambda_m).$$

En effet, la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & I_{n-4} \end{pmatrix}$$

appartient à $SO(n)$ et satisfait

$$C^{-1} a(\lambda_1, \dots, \lambda_m) C = a(-\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m).$$

Par conséquent, on peut écrire uniquement

$$Q(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = Q_+(\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2) + \lambda_1, \dots, \lambda_m Q_-(\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2)$$

où Q_+ et Q_- sont des polynômes symétriques. Il existe des polynômes P_+ et P_- en les P_{2k} tels que $P_+ + \mathrm{Pf} P_-$ coïncide avec P sur les matrices diagonales par blocs 2×2. Par invariance, $P_+ + \mathrm{Pf} P_- = P$. On conclut que P appartient à l'algèbre engendrée par les polynômes P_{2k} et par le pfaffien.

Si on demande l'invariance par $O(n)$, on peut utiliser la matrice

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & -I_{n-2} \end{pmatrix}$$

à la place de C et en déduire que pour tout polynôme $O(n)$-invariant P, $P(a(\lambda_1, \dots, \lambda_m))$ est un polynôme symétrique en les λ_k^2. Alors P appartient à l'algèbre engendrée par les P_{2k}.

Si n est impair, toute matrice antisymétrique est équivalente sous $SO(n)$ à une matrice diagonale par blocs 2×2 de la forme

$$b(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & & & & \\ \lambda_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & -\lambda_m & \\ & & & \lambda_m & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice C' appartient à $SO(n)$, donc l'argument, commun aux groupes $O(n)$ et $SO(n)$, se termine comme dans le cas $O(n)$, n pair. ∎

3.7 Classe d'Euler

L'homomorphisme de Weil possède une variante relative aux polynômes $SO(n)$-invariants sur l'espace des matrices antisymétriques. Cela produit des classes caractéristiques pour les fibrés vectoriels euclidiens orientés de rang pair.

Théorème 2 *L'image du pfaffien par l'homomorphisme de Weil est, à une constante près, la classe d'Euler. Si ∇ est une connexion sur un fibré vectoriel réel orienté ξ de rang n pair, qui préserve une structure euclidienne sur les fibres, alors la forme différentielle de degré n*

$$\mathrm{Pf}(-\frac{1}{2\pi}R^{\nabla})$$

est un représentant de la classe d'Euler $e(\xi)$.

Preuve. L'expression $\mathrm{Pf}(-\frac{1}{2\pi}R^{\nabla})$ se calcule localement dans un champ de repères orthonormés directs. La matrice de la courbure étant antisymétrique, son pfaffien est bien défini. Par invariance, il ne dépend pas du choix de repère orthonormé direct.

Comme en 3.4, on montre que la classe de cohomologie de de Rham de la forme $\mathrm{Pf}(-\frac{1}{2\pi}R^{\nabla})$ ne dépend pas de la connexion choisie, tant que la structure euclidienne ne change pas. Deux structures euclidiennes g et g' diffèrent par un automorphisme global a du fibré. En effet, soit s le champ d'automorphismes g-symétriques de ξ défini par $g'(e, e') = g(se, e')$. Alors $a = s^{1/2}$ convient. Si ∇' est une connexion qui préserve g', la connexion image réciproque $a^{-1}(\nabla') = \nabla$ préserve g. Si r est un champ de repères orthonormé local pour g, $r' = a(r)$ en est un pour g', donc

$$\mathrm{Pf}(-\frac{1}{2\pi}R^{\nabla'}) = \mathrm{Pf}(-\frac{1}{2\pi}R^{\nabla}).$$

Cela prouve que la classe de cohomologie considérée ne dépend pas du choix de structure euclidienne. Comme elle est clairement naturelle sous les applications lisses, c'est une classe caractéristique pour les fibrés vectoriels réels orientés.

L'axiome de degré est clairement vérifié. La multiplicativité sous les sommes directes de fibrés orientés de rangs pairs résulte de 2.12 et du fait que le pfaffien d'une matrice diagonale par blocs est le produit des pfaffiens des blocs, 3.11. Reste la normalisation. On utilise le fibré tangent à $\mathbf{C}P^1 = S^2$ muni de la connexion de Levi-Civita. La courbure de Gauss K est définie par

$$(R_{v,w}z) \cdot u = -K\, vol(v, w) vol(z, u),$$

d'où, dans un champ de repères orthonormés directs,

$$R^{\nabla} = -K\, vol\, J = \begin{pmatrix} 0 & K\, vol \\ -K\, vol & 0 \end{pmatrix}$$

où J est la rotation de $\pi/2$. Par conséquent

$$\mathrm{Pf}(-\frac{1}{2\pi}R^{\nabla}) = \frac{1}{2\pi}K\,vol,$$

dont l'intégrale vaut 2. Autrement dit, la classe de cohomologie de $\mathrm{Pf}(-\frac{1}{2\pi}R^{\nabla})$ est la classe d'Euler de la sphère, soit $-2h$ où h est l'opposée de la classe fondamentale. Comme le fibré tangent est induit du fibré tautologique par l'application $z \mapsto \bar{z}^2$, de degré -2, on en déduit que la classe caractéristique définie par le pfaffien vaut h pour le fibré tautologique, ce qui est la normalisation voulue. ■

Remarque 3.13 *La proposition 2 prouve l'existence de la classe d'Euler. Le fait qu'elle est à valeurs entières ne saute pas aux yeux. On retrouve (dans la cohomologie à coefficients réels au moins) l'identité* $e^2 = p_m$ *pour les fibrés vectoriels réels orientés de rang* $2m$*.*

Remarque 3.14 *Si un fibré vectoriel complexe admet une connexion de courbure nulle, alors ses classes de Chern sont nulles. Par conséquent, si un fibré vectoriel réel admet une connexion de courbure nulle, alors ses classes de Pontrjagin sont nulles. Il n'en est pas de même pour la classe d'Euler. Il existe des fibrés admettant une connexion localement triviale dont la classe d'Euler n'est pas nulle.*

C'est le cas du fibré tangent d'une variété compacte M sans bord orientable de dimension 2, de caractéristique d'Euler strictement négative. En effet, la donnée d'une métrique riemannienne à courbure -1 sur M détermine un homomorphisme du groupe fondamental de M dans le groupe des isométries préservant l'orientation du plan hyperbolique, isomorphe à $PSl(2, \mathbf{R})$. Cet homomorphisme se relève à $Sl(2, \mathbf{R})$, lequel agit sur $\mathbf{R}^2$. Le fibré vectoriel réel orienté de rang 2 sur M associé à cette représentation, qui possède une connexion à courbure nulle (voir en 1.16), est isomorphe au fibré tangent.

3.8 Applications

On donne deux applications, l'une au volume des variétés riemanniennes à courbure sectionnelle constante, l'autre aux variétés riemanniennes d'Einstein en dimension 4. Elles illustrent bien l'usage qu'on peut faire de la formule de Gauss-Bonnet en dimensions supérieures à 2 : obtenir des propriétés d'intégralité ou des obstructions topologiques à l'existence de métriques riemanniennes dont la courbure satisfait des conditions particulières.

Proposition 3.15 Volumes des sphères de dimension paire. *Si* $n = 2m$ *est pair, le volume de la sphère de dimension* n *vaut*

$$vol(S^n) = 2(\frac{4\pi}{\kappa})^m \frac{m!}{n!}.$$

Preuve. Un endomorphisme antisymétrique a d'un espace vectoriel euclidien E peut être vu comme un 2-vecteur $\eta \in \Lambda^2 E$, par la correspondance

$$a(w) \cdot v = \eta \cdot (w \wedge v).$$

Comme $\Lambda^2 E$ est une représentation irréductible du groupe orthogonal $O(E)$, tout endomorphisme $O(n)$-invariant de $\Lambda^2 E$ est proportionnel à l'identité. Par conséquent, la courbure de la connexion de Levi-Civita ∇ d'une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante égale à κ, vue comme section de $Hom(\Lambda^2 TM, \Lambda^2 TM)$, vaut λId. Or si v et w sont des vecteurs tangents orthonormés,

$$\begin{aligned}
\kappa &= (R_{v,w} w) \cdot v \\
&= (R^\nabla (v \wedge w)(w)) \cdot v \\
&= \lambda (v \wedge w) \cdot (w \cdot v) \\
&= -\lambda
\end{aligned}$$

donc $\lambda = -\kappa$. Par conséquent, dans un repère orthonormé direct $(e_1, \ldots, e_n)$ de l'espace tangent, le coefficient ij de la matrice de 2-formes R^∇ est $-\kappa e_i^* \wedge e_j^*$. Vue comme 2-forme alternée,

$$\begin{aligned}
R^\nabla &= -\kappa \sum_{1 \leq i < j \leq n} e_i^* \wedge e_j^* \otimes e_i^* \wedge e_j^* \\
&= -\frac{\kappa}{2} \sum_{i, j = 1, \ldots, n} e_i^* \wedge e_j^* \otimes e_i^* \wedge e_j^*.
\end{aligned}$$

Sa puissance extérieure m-ème, $m = n/2$, vaut

$$\begin{aligned}
(R^\nabla)^m &= (-\frac{\kappa}{2})^m \sum_{j_1, \ldots, j_n} e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_n}^* \otimes e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_n} \\
&= (-\frac{\kappa}{2})^m \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} e_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(n)}^* \otimes e_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(n)}^* \\
&= (-\frac{\kappa}{2})^m \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} vol \otimes vol \\
&= (-\frac{\kappa}{2})^m n! vol \otimes vol,
\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{Pf}(R^\nabla) = (-\frac{\kappa}{2})^m \frac{n!}{m!} vol.$$

Si $\kappa > 0$, il vient

$$\begin{aligned}
\langle e(TM^\kappa), \mu_{M^\kappa} \rangle &= \int_{M^\kappa} (-\frac{\kappa}{2})^m \frac{n!}{m!} (-\frac{1}{2\pi})^m vol \\
&= (\frac{\kappa}{4\pi})^m \frac{n!}{m!} vol(M^\kappa).
\end{aligned}$$

Sachant que M^κ est une sphère, dont la caractéristique d'Euler vaut 2, il vient

$$vol(M^\kappa) = 2(\frac{4\pi}{\kappa})^m \frac{m!}{n!}. \blacksquare$$

Proposition 3.16 Volumes des variétés à courbure sectionnelle -1. *Si n est pair, le volume de toute variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle constante égale à -1 est un multiple entier de $vol(S^n)/2$.*

Preuve. En courbure ± 1, le représentant e de la classe d'Euler donné par l'homomorphisme de Weil est proportionnel à l'élément de volume, $e = c_\pm\, vol$, où $c_- = (-1)^m c_+$. Pour la sphère S^n,

$$2 = \chi(S^n) = c_+ vol(S^n).$$

Si M est une variété riemannienne compacte à courbure constante -1,

$$\chi(M) = c_- vol(M).$$

Par conséquent,

$$vol(M) = \frac{1}{c_-}\chi(M) = (-1)^m \frac{1}{c_+}\chi(M) = (-1)^m \chi(M) \frac{vol(S^n)}{2}$$

est un multiple entier de $vol(S^n)/2$. $\blacksquare$

Remarque 3.17 *En particulier, les valeurs prises par le volume forment un sous-ensemble discret de* $\mathbf{R}$. *Ce n'est pas vrai en dimension 3.*

L'ensemble des volumes des variétés compactes à courbure -1, de dimension 3, possède des points d'accumulation. Si on y ajoute les volumes des variétés de volume fini non compactes, on obtient un sous-ensemble bien ordonné de $\mathbf{R}$ qui a la puissance du continu. Voir
W. Thurston, *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry.* Bull. Amer. Math. Soc. **6**, 357-379 (1982).

Proposition 3.18 *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension 4. On suppose que la* courbure de Ricci

$$v \mapsto \mathrm{trace}(R_{v,\cdot}v)$$

est constante sur le fibré des vecteurs unitaires tangents (équations d'Einstein). *Alors $\chi(M) \geq 0$, et l'égalité entraîne que le tenseur de courbure de M est identiquement nul (Berger). Si, de plus, M est orientable, $\chi(M) \geq \frac{1}{2}|p_1(M)|$, et l'égalité caractérise des familles de variétés kählériennes à courbure de Ricci nulle, les surfaces K3 (ce sont les variétés de Calabi-Yau en dimension complexe 2) et les surfaces d'Enriquès (Thorpe, Hitchin).*

Preuve. On commence par de l'algèbre linéaire particulier à la dimension 4. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 4. Le carré extérieur est une forme quadratique sur $\Lambda^2 E^*$, donc il s'écrit sous la forme

$$\alpha \wedge \alpha = *\alpha \cdot \alpha \, vol$$

où $*$ est un endomorphisme symétrique de $\Lambda^2 E^*$, appelé *opérateur de Hodge*. C'est une involution, elle possède deux valeurs propres 1 et -1, et les espaces propres Λ^+ et Λ^- correspondants sont tous deux de dimension 3. Tout endomorphisme u de $\Lambda^2 E^*$ se décompose en $u^+ + u^-$ où u^+ préserve la décomposition en $\Lambda^+ \oplus \Lambda^-$ et u^- échange les facteurs. Par exemple, si $h \in End(E)$, h définit un endomorphisme $\Lambda^2 h^\top$ de $\Lambda^2 E^*$, d'où une décomposition $h = h^+ + h^-$. On vérifie que si h est symétrique, alors h^+ se réduit à la projection orthogonale de h sur l'identité,

$$h^+ = \frac{1}{4}\mathrm{trace}(h)\, Id.$$

Soit M une variété riemannienne orientée de dimension 4, soit $b \in M$ et R le tenseur de courbure en b vu comme endomorphisme de $\Lambda^2_b T^* M$. Alors R^∇ se décompose en $R^+ + R^-$, et

$$\begin{aligned} R^\nabla \wedge R^\nabla &= R^+ \wedge R^+ + R^- \wedge R^- \\ &= |R^+|^2 vol - |R^-|^2 vol \end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{Pf}(R^\nabla) = \frac{1}{2}(|R^+|^2 - |R^-|^2) vol.$$

On vérifie que R^- ne dépend que de la courbure de Ricci, $R^- = \Lambda^2 h^-$ où h est l'endomorphisme symétrique de $T_b M$ tel que $Ricci(v) = h(v) \cdot v$. Si la courbure de Ricci est constante, h est un multiple de l'identité, donc $h^- = 0$, et $R^- = 0$. Il vient

$$\chi(M) = \int_M \mathrm{Pf}(R^\nabla) = \frac{1}{8\pi^2}\int_M |R^+|^2 vol \geq 0$$

et l'égalité entraîne que R^+ est nul lui aussi. L'orientation n'est pas essentielle dans cet argument.

Le tenseur R^+ se décompose à nouveau en $U + W^+ + W^-$ où U est proportionnel à l'identité, W^+ est nul sur Λ^- et W^- est nul sur Λ^+. Soit P_2 le polynôme invariant sur $M(4, \mathbf{R})$ de degré 2. On vérifie que

$$P_2(R^+) = (|W^+|^2 - |W^-|^2) vol.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \chi(M) - \frac{1}{2}p_1(M) &= \frac{1}{8\pi^2}\int_M (|R^+|^2 - |W^+|^2 + |W^-|^2) vol \\ &= \frac{1}{8\pi^2}\int_M (|U|^2 + |W^-|^2) vol \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $U = W^- = 0$.

De même,

$$\chi(M) + \frac{1}{2}p_1(M) = \frac{1}{8\pi^2}\int_M (|U|^2 + |W^+|^2)vol \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $U = W^+ = 0$. ∎

Pour plus de détails, voir

A.L. Besse, *Einstein manifolds.* Springer, Berlin (1986), chapitre 6.D.

4 Fibré des repères

4.1 Définition

Définition 4.1 *Soit ξ un fibré vectoriel lisse de rang n sur M. Le* fibré des repères *(`frame bundle`) de ξ, noté $Gl(\xi)$, est l'espace fibré au-dessus de M dont la fibre en b est l'ensemble des isomorphismes d'espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ sur ξ_b. On peut le voir comme le sous-ensemble de $Hom(\mathbf{R}^n, \xi)$ (ici, $\mathbf{R}^n$ désigne le fibré trivial) formé des homomorphismes inversibles. Par conséquent, c'est une variété différentiable.*

Par définition, chaque champ de repères local du fibré ξ définit une section locale du fibré des repères. ξ est trivial si et seulement si $Gl(\xi)$ admet une section globale.

Le groupe $Gl(n, \mathbf{R})$ agit à droite sur le fibré des repères par précomposition. Etant donné un point du fibré des repères, i.e. en un point $b \in M$, un isomorphisme $r : \mathbf{R}^n \to \xi_b$, et $g \in Gl(n, \mathbf{R})$,

$$r\,g = r \circ g$$

Les orbites de cette action sont exactement les fibres de la projection $Gl(\xi) \to M$. Deux sections locales r, r' de $Gl(\xi)$ définies sur U diffèrent par une application $g : U \to Gl(n, \mathbf{R})$, i.e.

$$r'(u) = r(u)g(u).$$

Exemple 4.2 *Soit ξ un fibré vectoriel réel ou complexe de rang 1. Le fibré des repères $Gl(\xi)$ s'identifie au complémentaire de la section nulle dans l'espace total de ξ.*

Par exemple, le fibré des repères du fibré tautologique γ_1^1 sur $\mathbf{R}P^d$ s'identifie à $\mathbf{R}^{d+1} \setminus \{0\}$. De même, le fibré des repères du fibré tautologique $\gamma_1^{1,\mathbf{C}}$ sur $\mathbf{C}P^1$ s'identifie à $\mathbf{C}^{d+1} \setminus \{0\}$.

4.2 Forme de connexion

Soit ∇ une connexion sur un fibré. Le fibré des repères permet de rassembler les matrices de connexion dans divers champ de repères en une seule 1-forme différentielle à valeurs matricielles.

Définition 4.3 *Soit ξ un fibré vectoriel sur M, $\pi : Gl(\xi) \to M$ son fibré des repères. Le fibré induit $\pi^*\xi$ vient avec un champ de repères global tautologique : en un point (b, r) de $Gl(\xi)$, r est un repère de $\xi_b = \xi_{\pi(b,r)}$, noté $r_{taut}(b, r)$. Soit ∇ une connexion sur ξ. La matrice de la connexion induite $\pi^*\nabla$ dans le repère r_{taut} est une matrice de 1-formes ω sur $Gl(\xi)$ qui ne dépend d'aucun choix. Elle s'appelle la* forme de connexion *(`connection form`) associée à ∇.*

Pour en donner une formule explicite, on choisit un champ de repère local r_0, dans lequel la matrice de la connexion est Γ. Alors $r_0' = r_0 \circ \pi$ est un champ de repères local du fibré induit $\pi^*\xi$, dans lequel la matrice de la connexion induite est $\Gamma' = \pi^*\Gamma$. Il diffère du champ de repères tautologique r_{taut} par

$$r_{taut} = r_0' g_0$$

où $g_0 : Gl(\xi) \to Gl(n, \mathbf{R})$, et $g_0(b, r)$ est la matrice de passage du repère $r_0(b)$ au repère r. Autrement dit, $r = r_0'(b) g_0(b, r)$. D'après la formule de changement de repère 1.5, la matrice de la connexion induite dans le champ de repères tautologique est

$$\omega = g_0^{-1} dg_0 + g_0^{-1} \pi^*\Gamma g_0.$$

4.3 Forme de Maurer-Cartan

On commence par le cas d'un fibré sur une base réduite à un point. Son fibré des repères est une copie du groupe linéaire. Il n'y a pas d'autre connexion que la connexion triviale, donc pas d'autre forme de connexion sur le groupe linéaire que la forme $g^{-1}dg$.

Définition 4.4 *On appelle* forme de Maurer-Cartan *sur le groupe linéaire la matrice de 1-formes*

$$\omega_G = M^{-1} dM.$$

Cette forme est invariante par les translations à gauche. Sous les translations à droite $g \mapsto R_g$, elle se transforme comme

$$R_g^* \omega_G = g^{-1} \omega_G g.$$

Elle satisfait l'identité, dite *équation de Maurer-Cartan*

$$d\omega_G + \omega_G \omega_G = 0.$$

Exemple 4.5 *En dimension 2, si on utilise $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ comme coordonnées sur $Gl(2, \mathbf{R})$ (resp. $Gl(2, \mathbf{C})$), alors*

$$\omega_G = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta d\alpha - \beta d\gamma & \delta d\beta - \beta d\delta \\ -\gamma d\alpha + \alpha d\gamma & -\gamma d\beta + \alpha d\delta \end{pmatrix}.$$

4.4 Propriétés de la forme de connexion

Proposition 4.6 *Soit ξ un fibré vectoriel de rang n sur M, muni d'une connexion ∇. La forme de connexion ω sur $Gl(\xi)$ a les propriétés suivantes.*

1. *Pour chaque point $(b,r) \in Gl(\xi)$, la matrice de 1-formes induites sur le groupe linéaire par l'application $g \mapsto R_g(b,r) = (b,rg)$ coïncide avec la forme de Maurer-Cartan ω_G.*

2. *Pour tout g, $R_g^*\omega = g^{-1}\omega g$.*

3. *Si r est un champ de repères local de ξ, vu comme une section $U \to Gl(\xi)$ de π, alors*

$$r_0^*\omega = \Gamma$$

est la matrice de la connexion ∇ dans le champ de repères r_0.

Preuve. Soit r_0 un champ de repères local. Reprenons l'expression

$$\omega = g_0^{-1}dg_0 + g_0^{-1}\pi^*\Gamma g_0,$$

où, pour chaque $(b,r) \in Gl(\xi)_{|U}$, $r = r_0(b)g_0(b,r)$. Par définition, $g_0(b,r_0(b)) = 1$, donc

$$r_0^*\omega = r_0^*\pi^*\Gamma = \Gamma.$$

Fixons $(b,r) \in Gl(\xi)$. Notons $a : Gl(n,\mathbf{R}) \to Gl(\xi)$ l'application définie par $a(g) = R_g(b,r) = (b,rg)$. Comme

$$r_0(b)g_0(b,r)g = rg = r_0(b)g_0(R_g(b,r)),$$

$g_0 \circ a(g) = g_0(R_g(b,r)) = g_0(b,r)g$, d'où

$$\begin{aligned} a^*\omega &= g^{-1}g_0(b,r)^{-1}g_0(b,r)dg + g^{-1}g_0^{-1}a^*\pi^*\Gamma g_0 g \\ &= g^{-1}dg \\ &= \omega_G \end{aligned}$$

car $\pi \circ a$ est constante.

Fixons $g \in Gl(n,\mathbf{R})$. Alors

$$\begin{aligned} R_g^*\omega &= g^{-1}g_0^{-1}dg_0 g + g^{-1}g_0^{-1}R_g^*\pi^*\Gamma g_0 g \\ &= g^{-1}\omega g, \end{aligned}$$

car $\pi \circ R_g = \pi$. ■

Remarque 4.7 *Plus généralement, étant donné un fibré vectoriel ξ, on appelle* forme de connexion *(`connection form`) sur $Gl(\xi)$ une matrice de 1-formes ω qui satisfait aux propriétés 1 et 2 de la proposition 4.6. Alors toute forme de connexion détermine une unique connexion sur ξ. Autrement dit, une forme de connexion sur le fibré des repères est juste une autre façon de parler de connexion.*

Exemple 4.8 *L'espace total du fibré des repères du fibré tautologique $\gamma^n(\mathbf{C}^{n+k})$ est l'ensemble des n-uplets de vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbf{C}^{n+k}$. On code un tel n-uplet par une matrice V à n colonnes et $n+k$ lignes. Alors la forme de connexion sur ce fibré des repères est*

$$\omega = (V^*V)^{-1}V^*dV.$$

Un point P du fibré des repères, c'est un sous-espace X de $\mathbf{C}^{n+k}$ et une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de X. Clairement, les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ déterminent X, donc décrivent à eux seuls le point P.

La matrice V est celle d'une application injective de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^{n+k}$. L'action à droite du groupe $Gl(n, \mathbf{C})$ consiste à précomposer par une bijection linéaire de $\mathbf{C}^n$, i.e. à multiplier V à droite par une matrice inversible g de taille $n \times n$.

Quand on transporte la forme ω par l'application $R_g : V \mapsto Vg$, on trouve

$$\begin{aligned}(g^*V^*Vg)^{-1}g^*V^*dVg &= g^{-1}(V^*V)^{-1}(g^*)^{-1}g^*V^*dVg \\ &= g^{-1}(V^*V)^{-1}V^*dVg \\ &= g^{-1}\omega g,\end{aligned}$$

comme il sied à une forme de connexion. Si on la transporte par $g \mapsto Vg$, à V fixé, on trouve

$$\begin{aligned}(g^*V^*Vg)^{-1}g^*V^*Vdg &= g^{-1}(V^*V)^{-1}(g^*)^{-1}g^*V^*Vdg \\ &= g^{-1}dg,\end{aligned}$$

qui est bien la forme de Maurer-Cartan de $Gl(n, \mathbf{C})$. Par conséquent, ω est une forme de connexion.

Soit $X \in G_n(\mathbf{C}^{n+k})$ un n-plan, $X^\perp$ son orthogonal. Fixons une base hilbertienne $(e_1, \ldots, e_{n+k})$ de $\mathbf{C}^{n+k}$ adaptée à la décomposition $X \oplus X^\perp$. Etant donnée une matrice L représentant une application linéaire de X dans $X^\perp$, notons $r(L)$ le champ de repères local $(e_1 + L(e_1), \ldots, e_n + L(e_n))$ du fibré tautologique correspondant. Le point $r(L)$ du fibré des repères est décrit par la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 \\ L \end{pmatrix}$. Par conséquent

$$\begin{aligned}r^*\omega &= (\begin{pmatrix} 1 & L^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ L \end{pmatrix})^{-1} \begin{pmatrix} 1 & L^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ dL \end{pmatrix} \\ &= (1 + L^*L)^{-1}L^*dL\end{aligned}$$

qui est bien la matrice de la connexion projetée dans le champ de repères local r. On conclut que ω est la forme de connexion de la connexion projetée.

Exemple 4.9 *Soit $f^*\xi$ un fibré induit, muni de la connexion induite $f^*\nabla$. Alors f induit une application $F : Gl(f^*\xi) \to Gl(\xi)$ qui envoie fibre sur fibre, et $\omega_{f^*\xi} = F^*\omega_\xi$.*

4.5 Forme de connexion et transport parallèle

Lemme 4.10 *Soit ξ un fibré vectoriel sur M muni d'une connexion ∇. Soit γ une courbe dans M, et $r(t)$ un repère de $\xi_{\gamma(t)}$. Alors r est parallèle si et seulement si $r^*\omega = 0$, i.e. la courbe r tracée dans le fibré des repères est tangente au noyau de la forme de connexion ω.*

Preuve. Quitte à remplacer ξ par le fibré induit $\gamma^*\xi$, on peut supposer que $M = \mathbf{R}$. Alors r est parallèle si et seulement si la matrice de la connexion dans le champ de repères r est nulle. Or celle-ci est $r^*\omega$, par définition. ■

Remarque 4.11 *Si γ est un lacet d'origine b, et r_0 un repère de ξ_b, alors γ se relève uniquement en un chemin dans le fibré des repères, qui part de r_0 qui est tangent au noyau de ω. Son extrémité est un repère $r_1 = r_0 h$, et h est l'holonomie de la connexion le long de γ.*

Le relèvement est donné par le transport parallèle. Son existence résulte aussi du fait que le noyau de ω forme un champ de plans supplémentaire de l'espace tangent aux fibres.

4.6 Courbure

Lemme 4.12 *Soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel ξ, soit ω la forme de connexion correspondante sur $Gl(\xi)$. Posons*

$$\Omega = d\omega + \omega\omega.$$

Alors pour tout champ de repères local r, $r^*\Omega$ est la courbure de ∇ lue dans le champ de repères r. De plus, la forme Ω est annulée par tout vecteur tangent aux fibres.

Preuve. L'identité

$$r^*\Omega = d\Gamma + \Gamma\Gamma = R^\nabla$$

est immédiate.

Soient v et w deux vecteurs tangents à $Gl(\xi)$ en (b, r).

On suppose que v est tangent à la fibre de b. Soit V le champ de vecteurs tangent aux fibres tel que $\omega(V)$ soit constant égal à $\omega(v)$. Alors V engendre le sous-groupe à un paramètre R_{g_t} de l'action du groupe linéaire sur $Gl(\xi)$, où $g_t = \exp(t\omega(v)) \in Gl(n, \mathbf{R})$.

On suppose que w est *horizontal*, i.e. $\omega(w) = 0$. Alors w se prolonge localement en un champ de vecteurs horizontal W. En effet, il suffit de choisir un prolongement arbitraire et de le projeter sur le plan horizontal parallèlement à l'espace tangent aux fibres. Pour tout t, $R_{g_t *}W$ est horizontal, donc la dérivée de Lie $\mathcal{L}_V W = [V, W]$ est horizontale. Il vient

$$\begin{aligned}
\Omega(V, W) &= d\omega(V, W) + \omega(V)\omega(W) - \omega(W)\omega(V) \\
&= V\omega(W) - W\omega(V) - \omega([V, W]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme tout vecteur est la somme d'un vecteur tangent aux fibres et d'un vecteur horizontal, cela prouve que $\Omega(v, w) = 0$ dès que l'un des vecteurs v ou w est tangent aux fibres. ∎

Exemple 4.13 *Soit ξ un fibré vectoriel complexe de rang 1 sur M, muni d'une connexion ∇. On note $\pi : Gl(\xi) \to M$. Alors $\Omega = \pi^* R^\nabla$.*

En effet, pour cette vérification locale, on peut supposer que ξ est trivial, $Gl(\xi) = M \times \mathbf{C}^*$. On note z la coordonnées sur $\mathbf{C}^*$. Alors Ω n'a pas de composantes divisible par dz, donc on peut la voir comme une famille de 2-formes différentielles sur M paramétrée par $\mathbf{C}^*$. Comme Ω est de plus invariante par l'action de $\mathbf{C}^*$, cette famille de formes est constante, ce qui signifie que $\Omega = \pi^*\phi$ où ϕ est une 2-forme différentielle sur M. Si r est une section, $\phi = r^*\pi^*\phi = r^*\Omega = R^\nabla$, donc $\Omega = \pi^* R^\nabla$.

Exercice 12 *En utilisant le fibré des repères, montrer que si un fibré vectoriel complexe de rang 1 sur une variété orientable M de dimension paire $n = 2k$ admet une section qui ne s'annule pas, alors pour toute connexion ∇ sur M, $\int_M (R^\nabla)^k = 0$.*

Exercice 13 *Vérifier que la forme de courbure du fibré tautologique $\gamma^n(\mathbf{C}^{n+k})$ sur $G_n(\mathbf{C}^{n+k})$, qui vit sur le fibré des repères paramétré par les matrices V de taille $(n + k) \times n$ et de rang n, vaut*

$$\Omega = -(V^*V)^{-1}dV^*V(V^*V)^{-1}V^*dV + (V^*V)^{-1}dV^*dV.$$

4.7 Connexions à courbure nulle

Théorème 3 *Soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel ξ sur une variété M. Alors ∇ est localement triviale si et seulement si sa courbure R^∇ est identiquement nulle.*

Preuve. Supposons que la courbure est nulle. Soit $H = \ker(\omega)$ le champ de plans horizontal sur le fibré des repères. Soient V, W des champs de vecteurs tangents à H. Alors

$$\begin{aligned}
\omega([V, W]) &= V\omega(W) - W\omega(V) - d\omega(V, W) \\
&= -d\omega(V, W) \\
&= -\Omega(V, W) + \omega(V)\omega(W) - \omega(W)\omega(V) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Frobenius, le champ de plans H est intégrable. Il existe donc pour tout $(b,r) \in Gl(\xi)$ une sous-variété $N \subset Gl(\xi)$ passant par (b,r), dont le plan tangent en chaque point coïncide avec H. La projection $\pi_{|N} : N \to M$ est un difféomorphisme local, donc sa réciproque $r : M \to N$ est bien définie au voisinage de b. C'est une section horizontale de $Gl(\xi)$, i.e. un champ de repères local parallèle, d'après 4.10. ∎

5 Développement limité de l'holonomie

Pour les fibrés de rang plus grand que 1, il n'existe pas de formule simple pour l'holonomie d'une connexion le long d'un lacet, généralisant 2.15. On se contente d'un développement limité quand la longueur du lacet tend vers 0.

5.1 Le 2-vecteur associé à un petit lacet

Soit U un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^d$, ξ un fibré vectoriel sur U, ∇ une connexion sur ξ. Toute 2-forme différentielle ω sur $\mathbf{R}^d$ à coefficients constants est fermée. Par conséquent, si $\gamma \subset U$ est un lacet basé à l'origine, et D un disque bordé par γ, l'intégrale

$$\ell_\gamma(\omega) = \int_D \omega$$

ne dépend pas du choix de D. Cette forme linéaire sur $\Lambda^2(\mathbf{R}^d)^* = \Lambda^2 T_0^* U$ définit un élément

$$\overrightarrow{aire}(\gamma) \in \Lambda^2 T_0 U,$$

appelé *aire vectorielle* de γ.

Proposition 5.1 *Soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel ξ sur M, et b un point de M. Soit γ un lacet basé en b. Lorsque l'aire de γ tend vers 0, l'holonomie le long de γ admet le développement limité suivant.*

$$Hol(\nabla, \gamma) = Id_{\xi_b} + \langle R^\nabla(b), \overrightarrow{aire}(\gamma) \rangle + O(\mathrm{long}(\gamma)^3).$$

On a utilisé des coordonnées locales pour définir l'aire vectorielle $\overrightarrow{aire}(\gamma) \in \Lambda^2 T_b M$, mais, asymptotiquement, celle-ci ne dépend pas du choix de coordonnées.

Preuve. On peut supposer que $M = \mathbf{R}^n$, que le fibré ξ est trivial et que la courbe γ est parcourue à vitesse constante. En choisissant un champ de repères local dont l'image est une sous-variété du fibré des repères tangente à l'origine au noyau de la forme de connexion, on peut supposer que la matrice Γ de la connexion est nulle à l'origine.

Notons s la section parallèle le long de γ telle que $s(0) = I$. Elle satisfait l'équation différentielle

$$\frac{ds}{dt} = a(t)s(t)$$

où $a(t) = -\Gamma_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$. On la compare à la section $\tilde{s}$, de même condition initiale, solution de

$$\frac{d\tilde{s}}{dt} = a(t).$$

Soit A un majorant de la norme de la matrice $a(t)$, $t \in [0, 1]$. Alors

$$\parallel \tilde{s}(1) - s(1) \parallel \leq A^2 e^A.$$

En effet, comme $\parallel \frac{ds}{dt} \parallel \leq A \parallel s(t) \parallel$,

$$\parallel s(t) \parallel \leq e^{At},$$

d'où

$$\parallel \frac{ds}{dt} \parallel \leq A e^{At},$$

puis

$$\parallel s(t) - I \parallel = \parallel s(t) - s(0) \parallel \leq e^{At} - 1.$$

Les équations donnent

$$\parallel \frac{d(\tilde{s} - s)}{dt} \parallel = \parallel a(t)(s(t) - I) \parallel \leq A(e^{At} - 1),$$

d'où, en intégrant,

$$\parallel \tilde{s}(1) - s(1) \parallel \leq e^A - 1 - A \leq A^2 e^A.$$

Ici, $A \leq C \operatorname{long}(\gamma)^2$ où C est une borne sur les dérivées premières de Γ. Il vient, lorsque la courbe est courte,

$$\parallel Hol(\nabla, \gamma) - I + \int_\gamma \Gamma \parallel \leq C^2 \mathrm{long}(\gamma)^3,$$

d'où, pour tout disque $u : D \to \mathbf{R}^n$ tel que $u_{|\partial D} = \gamma$,

$$\parallel Hol(\nabla, \gamma) - I + \int_{u(D)} d\Gamma \parallel = O(\mathrm{long}(\gamma)^3).$$

On remplit γ par l'application $u : D \to \mathbf{R}^n$ définie par $u(r, \theta) = r\gamma(\theta)$. Comme $d\Gamma$ diffère de la forme à coefficients constants $d_0\Gamma = R^\nabla(0)$ d'au plus $C \operatorname{long}(\gamma)$,

$$\left| \int_{u(D)} d\Gamma - \langle R^\nabla(0), \overrightarrow{aire}(\gamma) \rangle \right| = O(\mathrm{long}(\gamma)^3).$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \int_{u(D)} R^\nabla &= \int_{u(D)} d\Gamma + \Gamma\Gamma \\ &= \int_{u(D)} d\Gamma + O(\mathrm{long}(\gamma)^3). \ \blacksquare \end{aligned}$$