Chapitre 6 : Fibrés vectoriels

Pierre Pansu

July 12, 2005

La formule de Gauss-Bonnet relie la courbure d'une métrique riemannienne sur une surface à un invariant topologique de la surface, la caractéristique d'Euler-Poincaré. Pour comprendre comment cette formule se généralise aux dimensions supérieures, il est utile d'interpréter la caractéristique d'Euler-Poincaré comme un invariant du fibré tangent de la variété, et de se poser le problème plus général de la classification des fibrés vectoriels sur un espace topologique B.

Dans ce chapitre, on montre que ce problème se ramène à calculer les classes d'homotopie d'applications de B dans un espace universel, ce qui permet de traiter le cas des sphères de petite dimension.

Ensuite, on introduit une famille d'invariants, les classes de Stiefel-Whitney, de Chern, de Pontrjagin et la classe d'Euler, et on en indique, à titre culturel, quelques applications frappantes à des questions de topologie différentielle. La formule de Gauss-Bonnet en dimension supérieures n'arrivera qu'au chapitre suivant.

1 Fibrés vectoriels

1.1 Définition

Définition 1.1 *Soit B un espace topologique. Un fibré vectoriel (`vector bundle`) réel ξ de rang n sur B est la donnée d'un espace vectoriel réel ξ_b de dimension n dépendant continûment de $b \in B$. Autrement dit, on se donne un espace topologique E appelé* espace total *(`total space`) du fibré, une application continue $\pi : E \to B$ et une structure d'espace vectoriel réel sur chaque* fibre *$\xi_b = \pi^{-1}(b)$ qui est localement constante au sens suivant (*trivialité locale*) : pour chaque $b \in B$, il existe un voisinage U de b et un homéomorphisme*

$$h : U \times \mathbf{R}^n \to \pi^{-1}(U) := E(\xi_{|U})$$

tel que chaque $h_b : v \mapsto h(b, v)$ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque 1.2 *De la même façon, on définit*

- *les fibrés vectoriels de classe C^k sur une variété différentiable de classe C^k ;*
- *les fibrés vectoriels complexes ;*

- *les fibrés vectoriels complexes holomorphes sur les variétés complexes.*

Définition 1.3 *Une* section *(`cross section`) d'un fibré vectoriel ξ est une application $s : B \to E$ telle que $s(b) \in \xi_b$ pour tout b.*

Exemple 1.4 *Le* fibré trivial *(`trivial bundle`) de rang n sur B est $B \times \mathbf{R}^n$ avec la structure d'espace vectoriel constante sur $\mathbf{R}^n$. Les sections du fibré trivial s'identifient aux applications $B \to \mathbf{R}^n$.*

Exemple 1.5 *Le* fibré tangent *d'une variété de classe C^k est un fibré vectoriel de classe C^{k-1}. Ses sections sont les champs de vecteurs sur la variété.*

Exemple 1.6 *Le* fibré normal *νN d'une sous-variété $N \subset M$ est un fibré vectoriel sur N de rang* $\mathrm{dim} M - \mathrm{dim} N$. *Si M est munie d'une métrique riemannienne,*

$$\nu N = \{(b, v) \,|\, b \in N,\, v \in T_b M,\, v \perp T_b N\}.$$

Ses sections sont les champs de vecteurs normaux à N le long de N.

La trivialité locale s'obtient comme suit. Soit $b \in M$, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ un champ de repères orthonormés de TN défini au voisinage de b. Soient $e_{n+1}, \ldots e_m$ des champs de vecteurs sur M qui, en b, complètent $(e_1(b), \ldots, e_n(b))$ en une base de $T_b M$. En orthonormalisant $(e_1, \ldots, e_m)$, on trouve un repère $(e'_1, \ldots, e'_m)$ défini sur un voisinage U de b, tel que $(e'_{n+1}, \ldots, e'_m)$ soit formé de vecteurs orthogonaux à N. Alors

$$U \times \mathbf{R}^{m-n} \to \nu N_{|U}, \quad (x, t_{n+1}, \ldots, t_m) \mapsto (x, t_{n+1} e'_{n+1}(x) + \cdots + t_m e'_m(x))$$

est un difféomorphisme qui est un isomorphisme d'espace vectoriel sur chaque fibre.

Exemple 1.7 *Le* fibré tautologique *(`tautological bundle`) sur l'espace projectif réel $\mathbf{R}P^n$ a pour fibre en $b \in \mathbf{R}P^n$ la droite vectorielle de $\mathbf{R}^{n+1}$ représentée par b. C'est un fibré réel de rang 1. On le note γ_n. Construire une section locale non nulle de γ_n consiste à choisir continûment un vecteur directeur d'une droite variable.*

La trivialité locale se montre comme suit. Soit v un vecteur non nul de $\mathbf{R}^{n+1}$. Soit $b \in \mathbf{R}P^n$ la droite vectorielle qu'il engendre. Soit $F \subset \mathbf{R}^{n+1}$ un hyperplan supplémentaire de b. Notons $U \subset \mathbf{R}P^n$ l'ensemble des droites non contenues dans F. C'est un voisinage de b dans $\mathbf{R}P^n$. Alors chaque droite $b' \in U$ contient exactement un vecteur de la forme $v + w(b')$ avec $w(b') \in F$. Posons

$$U \times \mathbf{R} \to E(\gamma_{n|U}), \quad (b', t) \mapsto (b', tw(b')).$$

C'est un homéomorphisme qui est linéaire le long des fibres.

Exemple 1.8 *De même, il y a un* fibré tautologique *sur l'espace projectif complexe $\mathbf{C}P^n$. C'est un fibré complexe de rang 1. On le note $\gamma_n^{\mathbf{C}}$.*

Exemple 1.9 Fibrés sur la sphère. *Soit* $f : S^{d-1} \to GL(n, \mathbf{R})$ *une application continue. On construit un fibré* ξ_f *de rang* n *sur la sphère* S^d *comme suit. Notons* S_+ *et* S_- *les deux hémisphères délimités par l'équateur* $S^{d-1} \subset S^d$*. On identifie les fibrés triviaux* $S_+ \times \mathbf{R}^n$ *et* $S_- \times \mathbf{R}^n$ *en décidant que* $(b, v) \in S^{d-1} \times \mathbf{R}^n \subset S_+ \times \mathbf{R}^n$ *est identifié à* $(b, f(b)(v)) \in S^{d-1} \times \mathbf{R}^n \subset S_- \times \mathbf{R}^n$.

Une section s de ξ_f consiste à se donner deux applications $s_+ : S_+ \to \mathbf{R}^n$ et $s_- : S_- \to \mathbf{R}^n$ telles que, pour $b \in S^{d-1}$, $s_+(b) = f(b)s_-(b)$. On verra plus loin que tout fibré vectoriel sur la sphère peut être obtenu par cette construction.

1.2 Isomorphisme

Définition 1.10 *Deux fibrés* ξ *et* η *sont* isomorphes *(`isomorphic`) s'il existe un homéomorphisme* $h : E(\xi) \to E(\eta)$ *qui induit un isomorphisme de* ξ_b *sur* η_b *pour tout* $b \in B$.

Remarque 1.11 *On dit qu'un fibré vectoriel est* trivial *s'il est isomorphe au fibré trivial. Un fibré vectoriel* ξ *de rang* n *est trivial si et seulement si il existe des sections continues globalement définies* $e_i : B \to E$ *de* ξ *telles que, pour tout* $b \in B$, $(e_1(b), \dots, e_n(b))$ *soit une base de* ξ_b.

Exemple 1.12 *Le fibré tangent au cercle* $S^1 = \{|z| = 1\} \subset \mathbf{C}$ *est trivial.*

En effet, $z \mapsto iz$ est une section partout non nulle de TS^1, donc une base définie globalement.

Exemple 1.13 *Le fibré tautologique* γ_n *sur* $\mathbf{R}P^n$ *(resp.* $\gamma_n^{\mathbf{C}}$ *sur* $\mathbf{C}P^n$*) n'est pas trivial.*

Soit s une section du fibré γ_n. Pour chaque droite vectorielle $b \subset \mathbf{R}^{n+1}$, $s(b)$ s'interprète comme un vecteur non nul de $\mathbf{R}^{n+1}$, appartenant à la droite b. En particulier, si $x \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ est un vecteur non nul, engendrant une droite $\mathbf{R}x$, $s(\mathbf{R}x)$ s'écrit $t(x)x$ où $t(x) \in \mathbf{R}$ dépend continûment de x. Nécessairement, $t(-x) = -t(x)$. Comme $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ est connexe, la fonction t doit s'annuler, donc s s'annule quelque part.

Exercice 1 *Montrer que le fibré normal de la sphère* $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *est trivial.*

Exercice 2 *Montrer que l'espace total du fibré* γ_1 *est un ruban de Möbius.*

Exercice 3 *Soit* ξ_f *le fibré de rang 1 sur* S^1 *obtenu par la construction de l'exemple 1.9 au moyen de l'application* $f : S^0 \to Gl(1, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^*$ *définie par* $f(1) = 1$ *et* $f(-1) = -1$*. Montrer que* ξ_f *est isomorphe au fibré tautologique* γ_1.

Exercice 4 *Soit* ξ_f *le fibré vectoriel complexe de rang 1 sur* S^2 *obtenu par la construction de l'exemple 1.9 au moyen de l'application* $f : S^1 \to Gl(1, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$ *définie par* $f(z) = z$*. Montrer que* ξ_f *est isomorphe au fibré tautologique* $\gamma_1^{\mathbf{C}}$.

1.3 Structures géométriques sur les fibres

Définition 1.14 *Soit ξ un fibré vectoriel sur B. Une* structure euclidienne *(resp. complexe, resp. hermitienne, resp. symplectique) sur ξ est la donnée sur chaque fibre ξ_b d'un produit scalaire (resp. d'un endomorphisme de carré -1, resp. d'un produit scalaire hermitien, resp. d'une forme symplectique) g_b de sorte que, dans une base locale de sections continues, la matrice de g_b soit continue.*

Remarque 1.15 *Un fibré vectoriel réel sur B, muni d'une structure complexe, c'est la même chose qu'un fibré vectoriel complexe.*

Proposition 1.16 *Soit ξ un fibré vectoriel réel (resp. complexe) sur B. Si B est paracompact, alors ξ admet des structures euclidiennes (resp. hermitiennes).*

Preuve. Choisir des produits scalaires dans des trivialisations locales, puis en faire la moyenne au moyen de partitions de l'unité. ∎

2 Constructions

2.1 Fibré induit

Définition 2.1 *Soit ξ un fibré vectoriel sur un espace B. Soit $f : X \to B$ une application continue. Le* fibré induit *(**`induced bundle`**) $f^*\xi$ sur X est tel que, pour tout $x \in X$, $(f^*\xi)_x = \xi_{f(x)}$. Son espace total est*

$$E(f^*\xi) = \{(x, v) \in X \times E(\xi) \,|\, f(x) = \pi(v)\}.$$

Ses sections sont les applications $s : X \to E(\xi)$ telles que $\pi \circ s = f$.

Parmi les sections, il y a celles de la forme $s' \circ f$, où s' est une section de ξ. Cela ne constitue pas toutes les sections, en général.

Exemple 2.2 *Si f est l'inclusion d'un sous-ensemble X dans B, le fibré induit est la restriction du fibré ξ à X.*

Exemple 2.3 *Soit $c : \mathbf{R} \to M$ une courbe dans une variété. Un* champ de vecteurs le long de c *est, par définition, une section du fibré induit c^*TM.*

2.2 Sous-fibré

Définition 2.4 *Soient ξ et η des fibrés sur B. η est un* sous-fibré *(**`subbundle`**) de ξ si, pour chaque $b \in B$, η_b est un sous-espace vectoriel de ξ_b.*

Exemple 2.5 *Si $N \subset M$ est un sous-variété, TN est un sous-fibré de $TM_{|N}$.*

Exemple 2.6 *Le fibré tautologique γ_n sur $\mathbf{R}P^n$ est un sous-fibré du fibré trivial $\mathbf{R}P^n \times \mathbf{R}^{n+1}$. Et idem en remplaçant $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$.*

Exercice 5 *Soit ξ un fibré euclidien sur B et $\eta \subset \xi$ un sous-fibré. Vérifier que l'orthogonal $\eta^\perp \subset \xi$ est un sous-fibré.*

2.3 Produit cartésien

Définition 2.7 *Soient ξ et ξ' deux fibrés vectoriels sur B et B' respectivement. Leur* produit cartésien *$\xi \times \xi'$ est le fibré sur $B \times B'$ qui a pour fibre $\xi_b \oplus \xi'_{b'}$ en (b, b'). Son espacce total est $E(\xi) \times E(\xi')$.*

Exemple 2.8 *Le fibré tangent d'un produit de variétés est*

$$T(M \times M') = TM \times TM'.$$

2.4 Somme

Définition 2.9 *Soient ξ et ξ' deux fibrés vectoriels sur B. Leur* somme directe *(`direct sum` ou `Whitney sum`) $\xi \oplus \xi'$ est le fibré sur B dont la fibre en b est $\xi_b \oplus \xi'_b$. On peut le voir comme le fibré induit*

$$\xi \oplus \xi' = \delta^*(\xi \times \xi')$$

où $\delta : B \to B \times B$ est la diagonale. Toute section σ de $\xi \oplus \xi'$ s'écrit uniquement $\sigma = s + s'$ où s et s' sont des sections de ξ et ξ'.

Exercice 6 *Soit $N \subset M$ une sous-variété. Vérifier que*

$$TN \oplus \nu N = TM_{|N}.$$

2.5 Autres opérations

Plus généralement, toutes les opérations naturelles sur les espaces vectoriels

- produit tensoriel ;
- dual ;
- puissances tensorielles, symétriques, extérieures ;
- complexification (pour les fibrés réels) ;
- conjugué (pour les fibrés complexes) ;

donnent des opérations sur les fibrés vectoriels.

Remarque 2.10 *De la proposition 1.16, il résulte que sur une base B paracompacte, tout fibré vectoriel réel est isomorphe à son dual. Tout fibré vectoriel complexe est isomorphe au conjugué de son dual.*

En effet, une structure euclidienne (resp. hermitienne) donne un isomorphisme de ξ^* avec ξ (resp. avec $\bar{\xi}$.

Exercice 7 *Soient ξ et η deux fibrés vectoriels sur B. Soit f une section continue de $Hom(\xi, \eta)$. On suppose que le rang des applications linéaires f_b est constant sur B. Vérifier que le noyau $\ker f$ est un sous-fibré de ξ et que l'image $\mathrm{im} f$ est un sous-fibré de η.*

3 Cocycles

3.1 Homotopie et isomorphisme

Le problème de classification des fibrés à isomorphisme près est de nature homotopique. En effet, le lemme suivant exprime que deux fibrés "homotopes" sont automatiquement isomorphes.

Lemme 3.1 *Soit B un espace compact. Soit ξ un fibré vectoriel sur $[0,1] \times B$. Les restrictions de ξ à $\{0\} \times B$ et $\{1\} \times B$ sont des fibrés isomorphes.*

Preuve. Notons ξ_t la restriction de ξ à $\{t\} \times B$. Etant donné $t \in [0,1]$, pour t' assez voisin de t, $\xi_{t'}$ est isomorphe à ξ_t. En effet, notons η le fibré sur $[0,1] \times B$ induit par la projection $[0,1] \times B \to B$. L'identité id_{ξ_t} se prolonge en une section de $Hom(\eta, \xi)$ définie sur un voisinage de $\{t\} \times B$ (partition de l'unité), qui est un isomorphisme sur un voisinage.

Par conséquent, la relation d'isomorphisme des fibrés ξ_t partitionne l'intervalle $[0,1]$ en classes ouvertes. Par connexité, il n'y a qu'une seule classe. ∎

Corollaire 3.2 *Tout fibré vectoriel sur un espace contractile est trivial.*

Preuve. Soit $F : [0,1] \times B \to B$ une homotopie de l'identité à une application constante. Soit ξ un fibré sur B. Sur $[0,1] \times B$, on construit le fibré induit

$$E(F^*\xi) = \{(t,b,v) \in [0,1] \times B \times E(\xi) \,|\, \pi(v) = F(t,b)\}.$$

Les restrictions du fibré $F^*\xi$ à $\{0\} \times B$ et $\{1\} \times B$ sont ξ et un fibré trivial respectivement, donc ξ est trivial. ∎

3.2 Fibrés et recouvrements

Soit B un espace topologique, soit $\mathcal{U} = (U_\alpha)_\alpha$ un recouvrement de B par des ensembles U_α contractiles. On note

$$U_{\alpha_0 \ldots \alpha_k} := U_{\alpha_0} \cap \cdots U_{\alpha_k}$$

les intersections. Soit ξ un fibré vectoriel réel de rang n sur B. Alors la restriction de ξ à chaque U_α est triviale, donc il existe un isomorphisme $h_\alpha : E(\xi_{|U_\alpha}) \to U_\alpha \times \mathbf{R}^n$.

Le long d'une intersection $U_{\alpha\beta}$, on dispose de deux trivialisations. Sur $U_{\alpha\beta} \times \mathbf{R}^n$, on peut écrire

$$h_\alpha \circ h_\beta^{-1}(b,v) = (b, f_{\alpha\beta}(b)(v))$$

où $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to Gl(n, \mathbf{R})$ est continue.

Clairement,

$$f_{\beta\alpha} = f_{\alpha\beta}^{-1}.$$

De plus, sur une intersection triple $U_{\alpha\beta\gamma}$,

$$\begin{aligned}(b, f_{\alpha\beta}f_{\beta\gamma}f_{\gamma\alpha}(b)(v)) & \\ &= h_\alpha \circ h_\beta^{-1} \circ h_\beta \circ h_\gamma^{-1} \circ h_\gamma \circ h_\alpha^{-1}(b,v) \\ &= (b,v)\end{aligned}$$

donc $f_{\alpha\beta}f_{\beta\gamma}f_{\gamma\alpha} = 1$.

Inversement, supposons donnée, sur chaque intersection $U_{\alpha\beta}$, une application continue $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to Gl(n, \mathbf{R})$. Supposons que la relation $f_{\alpha\beta}f_{\beta\gamma}f_{\gamma\alpha} = 1$ est satisfaite sur chaque intersection triple $U_{\alpha\beta\gamma}$. On définit un fibré $\xi = \xi_f$ sur B comme suit. On part de la réunion disjointe des fibrés triviaux $U_\alpha \times \mathbf{R}^n$, et on identifie les fibres $\{b\} \times \mathbf{R}^n \subset U_\alpha \times \mathbf{R}^n$ et $\{b\} \times \mathbf{R}^n \subset U_\beta \times \mathbf{R}^n$ par $f_{\alpha\beta}^{-1}(b)$ si $b \in U_{\alpha\beta}$. Grâce à la relation $f_{\alpha\beta}f_{\beta\gamma}f_{\gamma\alpha} = 1$, tous couples (α, β) tels que $b \in U_{\alpha\beta}$ conduisent à la même identification. On peut donc se donner un fibré par un *cocycle* (`cocycle`) f.

Si deux fibrés ξ et ξ' sont isomorphes, un isomorphisme $G : E(\xi) \to E(\xi')$ donne sur chaque U_α un isomorphisme

$$h'_\alpha \circ G \circ h_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbf{R}^n \to E(\xi_{|U_\alpha}) \to E(\xi'_{|U_\alpha}) \to U_\alpha \times \mathbf{R}^n, \quad (b,v) \mapsto (b, g_\alpha(b)(v))$$

où $g_\alpha : U_\alpha \to Gl(n, \mathbf{R})$ est continue.

Sur une intersection $U_{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned}(b, g_\alpha^{-1} f'_{\alpha\beta} g_\beta(b)(v)) &= h_\alpha \circ G^{-1} \circ h'^{-1}_\alpha \circ h'_\alpha \circ h'^{-1}_\beta \circ h'_\beta \circ G \circ h_\beta^{-1} \\ &= h_\alpha \circ h_\beta^{-1} \\ &= (b, f_{\alpha\beta}(b)(v))\end{aligned}$$

donc $f_{\alpha\beta} = g_\alpha^{-1} f'_{\alpha\beta} g_\beta$.

Inversement, supposons donnés deux fibrés ξ_f et $\xi_{f'}$ par des cocycles f et f'. Supposons qu'il existe une collection d'applications continues $g_\alpha : U_\alpha \to Gl(n, \mathbf{R})$ telle que pour tout (α, β) tel que $U_{\alpha\beta}$ soit non vide, $f_{\alpha\beta} = g_\alpha^{-1} f'_{\alpha\beta} g_\beta$ sur $U_{\alpha\beta}$. Alors on définit un isomorphisme $G : E(\xi_f) \to E(\xi_{f'})$ en envoyant la fibre $\{b\} \times \mathbf{R}^n \subset U_\alpha \times \mathbf{R}^n$ de ξ_f sur la fibre $\{b\} \times \mathbf{R}^n \subset U_\alpha \times \mathbf{R}^n$ de $\xi_{f'}$ par $(b, v) \mapsto (b, g_\alpha(b)(v))$. Si $b \in U_{\alpha\beta}$, (b, v) est identifié au vecteur $(b, v') \in U_\beta \times \mathbf{R}^n$ tel que $v' = f_{\alpha\beta}(b)^{-1}(v)$. De même, son image $(b, g_\alpha(b)(v)) \in U_\alpha \times \mathbf{R}^n$ est identifiée au vecteur $(b, v'') \in U_\beta \times \mathbf{R}^n$ tel que $v'' = f'_{\alpha\beta}(b)^{-1}(g_\alpha(b)(v))$ Comme $f'^{-1}_{\alpha\beta} g_\alpha = g_\beta f^{-1}_{\alpha\beta}$ sur $U_{\alpha\beta}$, $v'' = g_\beta(v')$ donc G est compatible avec les identifications.

Remarque 3.3 *Le terme* cocycle *est suggéré par l'analogie avec le complexe de cochaînes obtenu lorsque le faisceau des applications continues à valeurs dans* $Gl(n, \mathbf{R})$ *est remplacé par un faisceau de groupes* abéliens A.

D'une certaine façon, on peut penser à l'ensemble des classes d'équivalence de fibrés vectoriels réels de rang n sur B comme à $\check{H}^1(\mathcal{U}, G)$ où G serait le faisceau des applications continues à valeurs dans $Gl(n, \mathbf{R})$.

On n'exploitera ce point de vue, développé dans
F. Hirzebruch, *Topological methods of algebraic geometry*, Springer, Berlin (1966).
que pour décrire les classes d'isomorphismes de fibrés sur les sphères.

3.3 Fibrés vectoriels sur les sphères

Proposition 3.4 *Soient f, f' deux applications continues de la sphère S^{d-1} dans $Gl(n, \mathbf{R})$ (resp. $Gl(n, \mathbf{C})$). Les fibrés ξ_f et $\xi_{f'}$ correspondants sur S^d sont isomorphes si et seulement si il existe deux constantes $c_\pm \in Gl(n, \mathbf{R})$ (resp. $\in Gl(n, \mathbf{C})$) telles que $c_- f$ et $f' c_+$ sont homotopes.*

Preuve. Se donner un isomorphisme $h : E(\xi_f) \to E(\xi_{f'})$, c'est se donner deux isomorphismes $h_\pm : S_\pm \times \mathbf{R} \to S_\pm \times \mathbf{R}$ compatibles le long de S^{d-1}. Si on note

$$h_\pm(b, v) = (b, h_\pm(b)(v))$$

où $h_\pm(b) \in Gl(n, \mathbf{R})$, la condition de compatibilité s'écrit

$$f'(b) h_+(b) = h_-(b) f(b).$$

Comme $h_\pm$ est définie sur un disque, elle est homotope à une application constante $c_\pm$, en tant qu'application $S^{d-1} \to GL(n, \mathbf{R})$. Par conséquent $f' c_+$ est homotope à $c_- f$.

Réciproquement, supposons qu'il existe deux matrices constantes $c_\pm$ telles que f' soit homotope à $c_- f c_+^{-1}$, i.e. qu'il existe une famille continue d'applications $f_t : S^{d-1} \to GL(n, \mathbf{R})$ telle que $f_0(b) = c_- f(b) c_+^{-1}$ et $f_1(b) = f'(b)$. Posons

$$g_t(b) = f_t(b) c_+ f(b)^{-1}.$$

C'est une homotopie de l'application constante c_- à $g_1 = f' c_+ f^{-1}$. On peut l'interpréter comme une application $h_- : S_- \to Gl(n, \mathbf{R})$ dont la restriction à S^{d-1} est g_1. Posons $h_+ \equiv c_+$. Alors $f' h_+ = h_- f$, donc le couple (h_+, h_-) définit un isomorphisme de ξ_f sur $\xi_{f'}$. Idem pour les fibrés complexes. ∎

Exemple 3.5 Fibrés sur le cercle. *Pour chaque entier $n \geq 1$, il existe exactement deux classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang n sur S^1. En particulier, tout fibré vectoriel réel de rang 1 sur S^1 est isomorphe ou bien au fibré trivial, ou bien au fibré γ_1. En rang $n > 1$, le fibré non trivial est $\mathbf{R}^{n-1} \oplus \gamma_1$. Tout fibré vectoriel complexe sur S^1 est trivial.*

En effet, quitte à multiplier f par une constante, on peut supposer que $f(1) = 1$. Le fibré réel ξ_f est alors uniquement déterminé par la composante connexe de $Gl(n, \mathbf{R})$ qui contient $f(-1)$. Comme $Gl(n, \mathbf{C})$ est connexe, deux applications quelconques de S^0 dans $Gl(n, \mathbf{C})$ sont homotopes, donc les fibrés ξ_f correspondants sont tous isomorphes.

Théorème 1 *Soit $d \geq 2$. Fixons un élément $c \in Gl(n, \mathbf{R})$ de déterminant négatif. Pour $g \in Gl(n, \mathbf{R})$, notons $\bar{g} = cgc^{-1}$. Cette conjugaison induit une involution $f \to \bar{f}$ de $\pi_{d-1}(Gl(n, \mathbf{R}))$ indépendante du choix de c. Les classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels réels orientés (resp. complexes) de rang n sur la sphère S^d sont en bijection le groupe d'homotopie $\pi_{d-1}(Gl^+(n, \mathbf{R}))$ (resp. avec le groupe $\pi_{d-1}(Gl(n, \mathbf{C}))$).*

Changer d'orientation se traduit par la conjugaison $f \to \bar{f}$ dans $\pi_{d-1}(Gl^+(n, \mathbf{R}))$. Si n est impair, cette conjugaison est l'identité (tout fibré orienté est isomorphe au fibré muni de l'orientation opposée), donc il n'y a pas de différence entre les classifications des fibrés orientés ou non. Si n est pair, ça dépend de d et de n.

Preuve. Soit ξ un fibré sur S^d. On note $G = Gl(n, \mathbf{R})$, $Gl^+(n, \mathbf{R})$ ou $Gl(n, \mathbf{C})$ suivant qu'on s'intéresse aux fibrés réels non orientés, orientés, ou aux fibrés complexes. D'après le lemme 3.2, les restrictions de ξ à S_+ et S_- sont des fibrés triviaux. Il existe donc des isomorphismes $h_\pm : E(\xi_{|S_\pm}) \to S_\pm \times \mathbf{R}^n$. Le long de S^{d-1}, $h_- \circ h_+^{-1}$ est un automorphisme du fibré trivial $S^{d-1} \times \mathbf{R}^n$, il s'écrit $(b, v) \mapsto (b, f(b)(v))$ où $f : S^{d-1} \to G$ est continue. Autrement dit, ξ est isomorphe au fibré ξ_f.

Fixons un point base $b_0 \in S^{d-1}$. Quitte à multiplier f par une constante, on peut supposer que $f(b_0) = 1$. Un fibré isomorphe donne lieu à une application $f' : S^{d-1} \to G$ telle que $f'(b_0) = 1$ et f est homotope à $c_- f c_+^{-1}$ où $c_\pm \in G$ sont des constantes. Comme $d \geq 2$, c_+ et c_- sont dans la même composante connexe du groupe G.

Si le groupe est connexe (cas des fibrés orientés ou complexes), f' est homotope à f. Toute homotopie f_t peut être améliorée en une homotopie envoyant le point base sur 1 (poser $g_t = f_t(b_0)^{-1} f_t$). On a donc associé à ξ un élément de $\pi_{d-1}(G)$. Inversement, le fibré ξ_f associé à une application $f : S^{d-1} \to G$ ne dépend que de la classe d'homotopie de f, donc les classes d'isomorphisme de fibrés correspondent aux classes d'homotopies d'applications pointées, c'est-à-dire aux éléments de $\pi_{d-1}(G)$.

Cas des fibrés non orientés. Comme $d \geq 2$, f est à valeurs dans $Gl^+(n, \mathbf{R})$. Lorsqu'on a multiplié f par une constante pour avoir $f(b_0) = 1$, on a choisi une orientation. Si $c_+ \in Gl^+(n, \mathbf{R})$, alors $c_- f c_+^{-1}$ est homotope à f. Sinon, f' est homotope à $\bar{f}$, qui correspond au choix de l'orientation opposée. On a donc associé à ξ une paire $\{f, \bar{f}\}$ d'éléments conjugués de $\pi_{d-1}(Gl^+(n, \mathbf{R}))$. Inversement, le fibré ξ_f associé à une application $f : S^{d-1} \to Gl^+(n, \mathbf{R})$ ne dépend que de la classe d'homotopie de f, et les fibrés ξ_f et $\xi_{\bar{f}}$ sont isomorphes, donc les classes d'isomorphisme de fibrés non orientés sont en bijection avec les paires $\{f, \bar{f}\}$.

Si n est impair, on peut prendre $c = -1$ et la conjugaison est alors l'identité. Cela reflète le fait que tout fibré possède l'automorphisme -1 qui renverse l'orientation. Si n est pair, choisir le représentant $\xi_{\bar{f}}$ plutôt que ξ_f revient à choisir une orientation. ∎

Corollaire 3.6 Fibrés sur la sphère S^2. *Tout fibré réel de rang 1 sur S^2 est trivial.*

Les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels réels orientés de rang 2 ou de fibrés vectoriels complexes de rang 1 sur S^2 coïncident. Elles forment une famille $O(k)$ indexée par les entiers naturels (voir exercice 8), de sorte que le changement d'orientation correspond à changer le signe de l'indice.

Pour tout entier $n \geq 3$, il existe exactement deux classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels réels de rang n sur S^2.

Tout fibré vectoriel complexe de rang $n > 1$ sur S^2 est isomorphe à exactement un des $\mathbf{C}^{n-1} \oplus O(k)$.

Pour tout $n \geq 1$, $Gl^+(n, \mathbf{R})$ est homotope à $SO(n)$ et $Gl(n, \mathbf{C})$ à $U(n)$ (décomposition polaire). Par conséquent, $Gl^+(1, \mathbf{R})$ est simplement connexe (donc tout fibré de rang 1 est trivial), $Gl^+(2, \mathbf{R})$ et $Gl(1, \mathbf{C})$ ont pour groupe fondamental $\mathbf{Z}$. D'après l'exercice 4, le fibré tautologique $\gamma_1^{\mathbf{C}}$ correspond à un générateur. La conjugaison agit en changeant l'orientation sur $SO(2)$, donc par -1 sur $\mathbf{Z} = \pi_1(SO(2)) = \pi_1(Gl^+(2, \mathbf{R}))$.

Le revêtement double $SU(2) \to SO(3)$ montre que $\pi_1(SO(3)) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

La fibration $SO(n-1) \to SO(n) \to S^{n-1}$ fournit la suite exacte longue

$$\cdots \to \pi_2(S^{n-1}) \to \pi_1(SO(n-1)) \to \pi_1(SO(n)) \to \pi_1(S^{n-1}) \to \cdots$$

qui montre que pour $n \geq 4$, $\pi_1(SO(n)) = \pi_1(SO(n-1)) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Le lacet non trivial est donné par l'injection $SO(2) \to SO(n)$ comme un bloc diagonal. Si $n \geq 3$ est pair, on peut choisir c qui est l'identité sur ce bloc. Par conséquent, les deux fibrés orientés de rang n sur S^2 donnent des fibrés non orientés distincts.

La fibration $U(n-1) \to U(n) \to S^{2n-1}$ fournit la suite exacte longue

$$\cdots \to \pi_2(S^{2n-1}) \to \pi_1(U(n-1)) \to \pi_1(U(n)) \to \pi_1(S^{2n-1}) \to \cdots$$

qui montre que pour $n \geq 2$, $\pi_1(U(n)) = \pi_1(U(n-1)) = \mathbf{Z}$. ∎

Exercice 8 *On note $O(-1)$ le fibré tautologique $\gamma_1^{\mathbf{C}}$, et $O(1)$ son dual. On note $O(0)$ le fibré trivial. Pour k entier positif, on note $O(k) = O(1)^{\otimes k}$ la puissance tensorielle k-ième de $O(1)$. Enfin, pour k entier négatif, on note $O(k) = O(-1)^{\otimes -k}$. Montrer que la famille $O(k)$ contient exactement un représentant de chaque classe d'isomorphisme de fibrés vectoriels complexes de rang un sur $\mathbf{C}P^1$.*

Exemple 3.7 *Tout fibré vectoriel réel ou complexe sur S^3 est trivial.*

En effet, le π_2 d'un groupe de Lie est toujours trivial.

4 Fibré universel

4.1 Grassmanniennes

Définition 4.1 *On appelle* grassmannienne *(`Grassmann manifold`)* $G_n(\mathbf{R}^{n+k})$ *l'espace des sous-espaces vectoriels de dimension n de $\mathbf{R}^{n+k}$. Chaque sous-espace correspondant à un unique projecteur orthogonal, on peut voir la grassmannienne comme un sous-ensemble compact dans l'espace vectoriel $End(\mathbf{R}^{n+k})$. $G_n(\mathbf{R}^{n+k})$ possède par définition un* fibré tautologique *$\gamma^n(\mathbf{R}^{n+k})$ de rang n,*

$$E(\gamma^n(\mathbf{R}^{n+k})) = \{(X, v) \in G_n(\mathbf{R}^{n+k}) \times \mathbf{R}^{n+k} \,|\, v \in X\}.$$

Vérifions la trivialité locale. Soit X un n-plan de $\mathbf{R}^{n+k}$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de X. Soit Y un supplémentaire de X. Tout n-plan X' supplémentaire de Y (c'est un voisinage de X dans la grassmannienne) s'écrit uniquement comme le graphe

$$gr(f) = \{v + f(v) \,|\, v \in X\}$$

d'une application linéaire $f_{X'} : X \to Y$. En effet, la projection p sur X parallèlement à Y, restreinte à X', est bijective. Si q désigne la projection sur Y parallèlement à X, alors $f_{X'} = q \circ (p_{|X'})^{-1}$. Alors les applications $X' \mapsto f_{X'}(e_i)$ forment une base de sections continues du fibré tautologique $\gamma^n(\mathbf{R}^{n+k})$ au voisinage de X.

Remarque 4.2 *On définit de la même façon le fibré tautologique* $\gamma^n(\mathbf{C}^{n+k})$ *sur la grassmannienne* $G_n(\mathbf{C}^{n+k})$

Définition 4.3 *On note* $G_n(\mathbf{R}^\infty)$ *la réunion des* $G_n(\mathbf{R}^{n+k})$*, munie de la topologie limite de la suite*

$$G_n(\mathbf{R}^n) \subset G_n(\mathbf{R}^{n+1}) \subset \cdots$$

On note $\gamma^n(\mathbf{R}^\infty)$ *la réunion des* $\gamma^n(\mathbf{R}^{n+k})$ *lorsque* k *tend vers l'infini. Idem en remplaçant* $\mathbf{R}$ *par* $\mathbf{C}$.

On admettra que $\gamma^n(\mathbf{R}^\infty)$ est un fibré vectoriel sur $G_n(\mathbf{R}^\infty)$. On se servira seulement de cet objet limite comme d'une commodité de langage.

4.2 Propriété universelle des grassmanniennes

Le fibré $\gamma^n(\mathbf{R}^\infty)$ est universel au sens où il induit n'importe quel fibré. Le problème de classification des fibrés se ramène à un problème homotopique : décrire les classes d'homotopie d'applications d'un espace dans les grassmanniennes.

Théorème 2 *Soit* B *un espace compact. Pour tout fibré vectoriel réel* ξ *sur* B*, il existe une application continue* $f : B \to G_n(\mathbf{R}^\infty)$ *telle que* $\xi = f^*\gamma^n(\mathbf{R}^\infty)$*. On dit qu'une telle application* classifie ξ*. Deux fibrés* ξ *et* ξ'*, classifiés par* f *et* f' *sont isomorphes si et seulement si* f *et* f' *sont homotopes dans* $G_n(\mathbf{R}^\infty)$.

Preuve. Montrons que ξ est isomorphe à un sous-fibré d'un fibré trivial. En tronquant des sections locales, on construit un grand nombre de sections continues $e_1, \ldots, e_{n+k}$ telles que, pour tout $b \in B$, les vecteurs $e_i(b)$ engendrent ξ_b. L'application $G_b : \mathbf{R}^{n+k} \to \xi_b$, $(t_i) \mapsto \sum_i t_i e_i(b)$ est surjective. Son noyau est donc de dimension k. Notons $f(b)$ l'orthogonal du noyau de G_b. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{n+k}$ de dimension n, donc $f : B \to G_n(\mathbf{R}^{n+k})$ est bien définie. L'application G_b induit un isomorphisme de la fibre $f(b)$ de $\gamma^n(\mathbf{R}^{n+k})$ en $f(b)$ sur ξ_b. Par conséquent, ξ est isomorphe au fibré induit $f^*\gamma^n(\mathbf{R}^{n+k})$.

Soient f et f' deux applications $B \to G_n(\mathbf{R}^{n+k})$ qui classifient des fibrés ξ et ξ'. Supposons f et f' homotopes. Soit $F : [0,1] \times B \to G_n(\mathbf{R}^{n+k})$ une homotopie, soit $\eta = F^*\gamma^n(\mathbf{R}^{n+k})$. Alors la restriction de η à $\{0\} \times B$ (resp. $\{1\} \times B$) est ξ (resp. ξ'). Le lemme 3.1 entraîne que ξ et ξ' sont isomorphes.

Inversement, soient f et f' deux applications $B \to G_n(\mathbf{R}^{n+k})$ qui classifient le même fibré ξ. Elles se relèvent en des applications F et $F' : E(\xi) \to E(\gamma^n(\mathbf{R}^{n+k})) \to \mathbf{R}^{n+k}$ qui sont linéaires sur les fibres. Posons $F_t = (1-t)F + tF'$. Supposons que pour tout t et tout b, F_t est injective sur la fibre ξ_b. Alors $F_t(\xi_b)$ est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathbf{R}^{n+k}$, qu'on note $f_t(b)$. On obtient ainsi l'homotopie souhaitée entre f et f'.

La condition d'injectivité est certainement satisfaite s'il existe deux sous-espaces supplémentaires G et G' de $\mathbf{R}^{n+k}$ tels que F soit à valeurs dans G et F' à valeurs dans G'. Pour se mettre dans cette situation, on utilise une famille à un paramètre d'endomorphismes L_t de $\mathbf{R}^{2n+2k} = \mathbf{R}^{n+k} \oplus \mathbf{R}^{n+k} = G \oplus G'$ telle que $L_0 = id$ et L_1 échange G et G'. L_t agit sur la grassmannienne $G_n(\mathbf{R}^{2n+2k})$. L'application f' est homotope par $L_t \circ f'$ à $f'' = L_1 \circ f'$. Le relèvement F'' est à valeurs dans G' alors que F est à valeurs dans G. Par conséquent, f est homotope à f'' et donc à f' dans $G_n(\mathbf{R}^{2n+2k})$. ∎

Exemple 4.4 *Pour $d \geq 2$, l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $S^d \to X$ s'identifie au quotient du groupe $\pi_d(X, x_0)$ par l'action de $\pi_1(X, x_0)$. Cette action est définie comme suit : toute application $(S^d, b_0) \to (X, x_0)$ se relève au revêtement universel $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ d'autant de manières différentes qu'il y a d'images réciproques de x_0 dans $\tilde{X}$, i.e. d'éléments de $\pi_1(X, x_0)$. Par conséquent, l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels réels de rang n sur S^d est en bijection avec $\pi_d(G_n(\mathbf{R}^\infty), *)/\pi_1(G_n(\mathbf{R}^\infty), *)$.*

Remarque 4.5 *L'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés orientés de rang n sur la sphère S^d est en bijection à la fois avec $\pi_{d-1}(Gl^+(n, \mathbf{R}))$ (théorème 1) et avec $\pi_d(G_n^+(\mathbf{R}^\infty))$ (variante du theorème 2 pour les fibrés orientés, utilisant la grassmannienne des n-plans orientés comme espace universel).*

Le fait que ces deux groupes sont isomorphes résulte de la suite exacte en homotopie induite par la fibration

$$Gl^+(n, \mathbf{R}) \to V_n \to G_n^+(\mathbf{R}^\infty)$$

où V_n, espace des n-uplets de vecteurs linéairement indépendants de $\mathbf{R}^\infty$, s'appelle la *variété de Stiefel*, et du fait que les groupes d'homotopie de V_n sont nuls.

De même, l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés non orientés de rang n sur la sphère S^d est en bijection avec

$$\pi_{d-1}(Gl(n, \mathbf{R}))/\pi_0(Gl(n, \mathbf{R})) = \pi_d(G_n(\mathbf{R}^\infty))/\pi_1(G_n(\mathbf{R}^\infty)).$$

Corollaire 4.6 *La classification à isomorphisme près des fibrés vectoriels de classe C^k, C^∞, est la même que celle des fibrés topologiques sous-jacents.*

Preuve. En effet, toute application continue entre deux variétés lisses est homotope à une application lisse, et deux applications lisses sont homotopes si et seulement si elles vivent dans une même famille lisse à un paramètre. ∎

5 Classes caractéristiques

5.1 Motivation

La classe d'Euler mesure l'obstruction à trouver une section d'un fibré qui ne s'annule pas. Elle trouve son origine en homologie. Soit ξ un fibré vectoriel réel orienté de rang n sur une variété compacte orientée B de dimension d. Une section générique s de ξ est transverse à la section nulle. Par conséquent, le lieu de ses zéros est une sous-variété $s^{-1}(0)$ compacte sans bord orientée de dimension $d-n$, elle possède une classe d'homologie $[s^{-1}(0)] \in H_{d-n}(B, \mathbf{Z})$ qui ne dépend pas du choix de la section s. C'est la classe d'Euler de ξ en homologie.

Si $\xi = TB$ est le fibré tangent de B, s un champ de vecteurs générique, alors $[s^{-1}(0)] \in H_0(B, \mathbf{Z})$ compte le nombre de zéros avec signes de s. D'après un théorème de H. Hopf, ce nombre coïncide avec la caractéristique d'Euler-Poincaré de B, d'où le nom de classe d'Euler.

Soit $f : B' \to B$ une submersion, soit $\xi' = f^*\xi$. Alors $s' = s \circ f$ est une section générique de ξ', donc la classe d'Euler de ξ' est $[f^{-1}s^{-1}(0)]$, ce qui ne correspond pas à la façon dont les applications agissent sur l'homologie.

La dualité de Poincaré réalise un isomorphisme modulo torsion entre $H_{d-n}(B, \mathbf{Z})$ et $H^n(B, \mathbf{Z})$, d'où une classe d'Euler en cohomologie, notée $e(\xi)$. Concrètement, si V et W sont deux sous-variétés compactes sans bord orientées transverses, de dimensions complémentaires,

$$\langle P.D.[V], [W] \rangle = V \cdot W$$

est le nombre de points d'intersection (avec signes) de V et W. Soit $W \subset B'$ une sous-variété transverse à $s'^{-1}(0)$, de dimension complémentaire. Il vient

$$\begin{aligned} \langle e(\xi'), [W] \rangle &= \langle P.D.[f^{-1}s^{-1}(0)], [W] \rangle \\ &= [f^{-1}s^{-1}(0)] \cdot [W] \\ &= [s^{-1}(0)] \cdot [f(W)] \\ &= \langle P.D.[s^{-1}(0)], [f(W)] \rangle \\ &= \langle f^* P.D.[s^{-1}(0)], [W] \rangle \\ &= \langle f^* e(\xi), [W] \rangle \end{aligned}$$

donc $e(\xi') = f^*e(\xi)$. Autrement dit, c'est la version cohomologique qui est naturelle sous les submersions (en fait, sous les applications continues quelconques). Cette version cohomologique est d'une portée plus générale, elle a un sens sur une base quelconque. La classe d'Euler est le prototype des classes caractéristiques.

La naturalité ne suffit pas à caractériser une classe caractéristique. Remarquons que la classe d'Euler se comporte simplement sous les sommes directes. Si s et s' sont des sections génériques de ξ et ξ', $s + s'$ est une section générique de $\xi \oplus \xi'$, et les sous-variétés $s^{-1}(0)$ et $s'^{-1}(0)$ sont transverses. Alors

$$e(\xi \oplus \xi') = P.D.([s^{-1}(0)] \cdot [s'^{-1}(0)]) = e(\xi) \cup e(\xi').$$

Cette règle, plus une normalisation pour un fibré modèle de rang 2 détermine uniquement la classe d'Euler.

5.2 Définition

Définition 5.1 *On appelle* classe caractéristique *(`characteristic class`) une application c qui à chaque fibré vectoriel ξ sur un espace B associe une classe de cohomologie $c(\xi) \in H^*(B)$, et qui possède les propriétés suivantes.*

- Invariance. *Si ξ est isomorphe à ξ', $c(\xi) = c(\xi')$;*
- Naturalité. *Si $f : B' \to B$ est une application continue, alors $c(f^*\xi) = f^*c(\xi)$.*

Exemple 5.2 *Soit σ une classe de cohomologie de la grassmannienne $G_n(\mathbf{R}^\infty)$. Etant donné un fibré vectoriel réel de rang n sur B, posons*

$$c_\sigma(\xi) = f_\xi^* \sigma$$

où $f_\xi : B \to G_n(\mathbf{R}^\infty)$ est une application classifiante de ξ. D'après le théorème 2, f_ξ est unique à homotopie près, donc $c_\sigma(\xi)$ est bien définie. L'application c_σ est donc une classe caractéristique pour les fibrés vectoriels réels de rang n.

Clairement, toute classe caractéristique c est de cette forme, avec $\sigma = c(\gamma^n(\mathbf{R}^\infty))$. Il en va de même pour les fibrés complexes.

5.3 Classe d'Euler

Définition 5.3 *Il existe une unique classe caractéristique pour les fibrés vectoriels réels orientés, appelée* classe d'Euler *(`Euler class`), qui satisfait les axiomes suivants.*

1. Degré. *Si ξ est de rang n, $e(\xi)$ est de degré n. Si n est impair, $e(\xi) = 0$.*
2. Produit. *$e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \cup e(\xi')$.*
3. Normalisation. *Soit $\gamma_1^{1,\mathbf{C}}$ le fibré tautologique sur $\mathbf{C}P^1$, vu comme fibré réel orienté. Alors*

$$e(\gamma_1^{\mathbf{C}}) = -h$$

où h est la classe fondamentale en cohomologie de $H^2(\mathbf{C}P^1, \mathbf{Z})$, duale de Poincaré de la classe d'homologie d'un point (représentée par n'importe quelle 2-forme d'intégrale 1).

La classe d'Euler est à valeurs dans la cohomologie entière.

L'existence et l'unicité sont des propriétés des grassmanniennes et de leurs fibrés tautologiques. On admettra l'unicité. L'existence résulte de la théorie de Chern-Weil développée au chapitre suivant.

Exercice 9 *Montrer que le fibré tangent à $\mathbf{C}P^1$ est induit du fibré tautologique par l'application $z \mapsto z^{-2}$. En déduire que sa classe d'Euler vaut $2h$.*

Exemple 5.4 *Plus généralement, la classe d'Euler du fibré tangent de la sphère* S^d *vaut* 0 *si* d *est impair, et* $2f$*, où* $f \in H^d(S^d, \mathbf{Z})$ *est la classe fondamentale en cohomologie, si* d *est pair.*

La preuve sera donnée au chapitre suivant.

Proposition 5.5 *Si* ξ *admet une section qui ne s'annule pas, alors* $e(\xi) = 0$.

Preuve. En effet, cette section engendre un sous-fibré trivial $\ell \subset \xi$. Un fibré trivial est induit par une application à valeurs dans un point, dont le H^1 est nul, donc sa classe d'Euler est nulle. Il vient

$$e(\xi) = e(\ell) \cup e(\ell^{\perp}) = 0 \cup e(\ell^{\perp}) = 0. \blacksquare$$

Corollaire 5.6 *Sur une sphère de dimension paire, il n'existe pas de champs de vecteurs sans zéros.*

Une sphère de dimension impaire S^{2n-1} peut être vue comme la sphère unité de $\mathbf{C}^n$. La champ de vecteurs qui en $b \in S^{2n-1}$ vaut ib est tangent à la sphère et ne s'annule pas.

Exercice 10 *Montrer que fibré tangent d'une sphère de dimension paire n'admet aucun sous-fibré orientable.*

5.4 Classes de Stiefel-Whitney

Pourquoi décide-t'on que la classe d'Euler d'un fibré orientable de rang impair est nulle ?

Soit ξ un fibré vectoriel réel lisse orienté de rang n sur une variété compacte sans bord orientée B de dimension d. Soient s, s' deux sections génériques de ξ. Soit Z le lieu des points $b \in B$ où $s'(b)$ est un multiple positif de $s(b)$. Supposons pour simplifier que s et s' n'ont pas de zéro commun. Alors Z est une variété à bord de dimension $d - n + 1$, dont le bord est la réunion de $s^{-1}(0)$ et de $s'^{-1}(0)$. En tenant compte des orientations, si ξ est de rang impair, $\partial Z = s^{-1}(0) + s'^{-1}(0)$ donc $2[s^{-1}(0)] = 0$ en homologie.

Si on raisonne modulo 2, $\partial Z = 0$ donc la classe d'homologie $[Z]$ est un nouvel invariant, c'est une classe de Stiefel-Whitney en homologie. On s'attend donc à l'existence d'une classe caractéristique duale en cohomologie de degré $n - 1$ qui mesure l'obstruction à l'existence d'un couple de sections linéairement indépendantes.

Définition 5.7 *Il existe une unique classe caractéristique pour les fibrés vectoriels réels, à valeurs dans la cohomologie à coefficients dans* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$*, appelée* classe de Stiefel-Whitney totale *(`total Stiefel-Whitney class`), qui satisfait les axiomes suivants.*

1. Degré. *Si ξ est de rang n, $w(\xi)$ a des composantes seulement en degrés $\leq n$.*

2. Produit. $w(\xi \oplus \xi') = w(\xi) \cup w(\xi')$.

3. Normalisation. *Soit γ_1 le fibré tautologique sur $\mathbf{R}P^1$. Alors*

$$w(\gamma_1^{\mathbf{C}}) = 1 + a$$

où a est le générateur de $H^1(\mathbf{R}P^1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

Sa composante de degré i s'appelle la i-ème classe de Stiefel-Whitney w_i.

On l'admettra l'existence de cette classe. L'unicité sera prouvée au paragraphe 5.6. On verra en 5.18 que w_1 est l'obstruction à l'orientabilité du fibré.

Exercice 11 *Montrer que le fibré tangent d'une sphère a une classe de Stiefel--Whitney triviale.*

Notons a l'élément non nul de $H^1(\mathbf{R}P^d, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Pour la suite, on aura besoin de savoir que l'espace de cohomologie $H^i(\mathbf{R}P^d, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est de dimension 1, engendré par a^i, pour $i = 1, \ldots, d$, et que $H^i(\mathbf{R}P^d, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$ pour $i > d$.

Exercice 12 *Montrer que le fibré tautologique γ_d^1 de l'espace projectif réel $\mathbf{R}P^d$ a pour classe de Stiefel-Whitney $1 + a$ où a est le générateur de $H^1(\mathbf{R}P^d, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.*

Exercice 13 *Montrer que le fibré tangent de l'espace projectif réel $\mathbf{R}P^d$ a pour classe de Stiefel-Whitney $(1 + a)^{d+1}$.*

5.5 Classes de Chern

Pour les fibrés possédant une structure complexe, on n'a pas besoin de réduire modulo 2, on dispose de classes entières.

Définition 5.8 *Il existe une unique classe caractéristique pour les fibrés vectoriels complexes, appelée* classe de Chern totale *(`total Chern class`), qui satisfait les axiomes suivants.*

1. Degré. *Si ξ est de rang n, $c(\xi)$ a des composantes seulement en degrés $\leq 2n$.*

2. Produit. $c(\xi \oplus \xi') = c(\xi) \cup c(\xi')$.

3. Normalisation. *Soit $\gamma_1^{\mathbf{C}}$ le fibré tautologique sur $\mathbf{C}P^1$. Alors*

$$c(\gamma_1^{\mathbf{C}}) = 1 - h$$

où h est le générateur de $H^2(\mathbf{C}P^1, \mathbf{Z})$, représenté par n'importe quelle 2-forme d'intégrale 1.

La classe de Chern totale est à valeurs dans la cohomologie entière. Elle n'a de composantes qu'en degrés pairs. Sa composante de degré $2i$ s'appelle la i-ème classe de Chern c_i.

Comme pour la classe d'Euler, l'existence et l'unicité sont des propriétés des grassmanniennes et de leurs fibrés tautologiques. La preuve de l'unicité, donnée au paragraphe 5.6, requiert des propriétés de cohomologie qu'on admettra. L'existence résulte de la théorie de Chern-Weil développée au chapitre suivant.

Exercice 14 *Montrer que pour tout $k \in \mathbf{Z}$, le fibré $O(k)$ de l'exercice 8 a pour classe de Chern $1 + kh$.*

Exercice 15 *Montrer que le fibré tautologique $\gamma_d^{1,\mathbf{C}}$ sur l'espace projectif complexe $\mathbf{C}P^d$ a pour classe de Chern $1-h$ où h est le dual de Poincaré d'une droite projective. De même, montrer que la classe de Chern de son dual $(\gamma_d^{1,\mathbf{C}})^*$ vaut $1 + h$.*

Exemple 5.9 *La classe de Chern du fibré tangent complexe de l'espace projectif complexe $\mathbf{C}P^d$ vaut $(1 + h)^{d+1}$, où h est le dual de Poincaré d'une droite projective.*

En un point $b \in \mathbf{C}P^d$ représentant une droite ℓ de $\mathbf{C}^{d+1}$, l'espace tangent complexe à $\mathbf{C}P^d$ est $Hom_{\mathbf{C}}(\ell, \ell^{\perp})$. Notons $\gamma = \gamma_d^{1,\mathbf{C}}$ le fibré tautologique. Alors le fibré tangent complexe $\tau = T^{1,0}\mathbf{C}P^d$ satisfait

$$\tau = Hom_{\mathbf{C}}(\gamma, \gamma^{\perp}).$$

D'autre part,

$$\gamma \oplus \gamma^{\perp} = \mathbf{C}^{d+1}$$

est un fibré trivial. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \tau \oplus \mathbf{C} &= Hom_{\mathbf{C}}(\gamma, \gamma^{\perp}) \oplus Hom_{\mathbf{C}}(\gamma, \gamma) \\ &= Hom_{\mathbf{C}}(\gamma, \gamma^{\perp} \oplus \gamma) \\ &= Hom_{\mathbf{C}}(\gamma, \mathbf{C}^{d+1}) \\ &= (\gamma^*)^{d+1}. \end{aligned}$$

D'après l'exercice 15, $c((\gamma)^*) = 1 + h$. Il vient

$$\begin{aligned} c(\tau) &= c(\tau \oplus \mathbf{C}) \\ &= c(\gamma^*)^{d+1} \\ &= (1 + h)^{d+1}. \end{aligned}$$

5.6 Unicité des classes de Chern et de Stiefel-Whitney

Lemme 5.10 *(`Splitting principle`). Soit ξ un fibré vectoriel réel ou complexe sur B. Il existe un espace B' et une application $f : B \to B'$ tels que $f^*\xi$ se decompose en somme de fibrés de rang 1, et que $f^* : H^*(B, \mathbf{Z}) \to H^*(B', \mathbf{Z})$ (resp. $f^* : H^*(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^*(B', \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$) soit injective.*

Preuve. Soit $P(\xi)$ le quotient de $E(\xi)$ par l'action de $\mathbf{R}^*$ (resp. $\mathbf{C}^*$) par multiplication dans les fibres. L'application $\pi : E(\xi) \to B$ passe au quotient en $\pi : P(\xi) \to B$. Le fibré $\pi^*\xi$ possède un sous-fibré de rang 1 canonique $\ell \subset \pi^*\xi$. En effet, pour chaque $b \in B$, au dessus de l'espace projectif $\pi^{-1}(b)$, $\pi^*\xi$ est trivial et contient le fibré tautologique. On montre (J. Leray) que $\pi^* : H^*(B, \mathbf{Z}) \to H^*(P(\xi), \mathbf{Z})$ (resp. $\pi^* : H^*(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^*(P(\xi), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$) est injective (admis). Il ne reste plus qu'à itérer la construction à partir du fibré $\ell\perp \subset \pi^*\xi$. ∎

Preuve de l'unicité. Soient c et c' deux classes caractéristiques qui satisfont les axiomes de la définition 5.7 ou 5.8. $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$ désigne $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}$. L'injection $\iota : \mathbf{K}P^1 \to \mathbf{K}P^\infty = G_1(\mathbf{K}^\infty)$ induit une application injective $H^{1,2}(G_1(\mathbf{K}^\infty), \mathbf{A}) \to H^{1,2}(\mathbf{K}P^1, \mathbf{A})$ (admis), le générateur de $H^{1,2}(\mathbf{K}P^\infty, \mathbf{A})$ est noté h, comme son image dans $H^{1,2}(\mathbf{K}P^1, \mathbf{A})$. Par naturalité et normalisation,

$$\iota^* c(\gamma^1(\mathbf{K}^\infty)) = c(\gamma_1^1) = 1 + h = c'(\gamma_1^1) = \iota^* c'(\gamma^1(\mathbf{K}^\infty))$$

donc $c(\gamma^1(\mathbf{K}^\infty)) = c'(\gamma^1(\mathbf{K}^\infty))$. Comme tout fibré de rang 1 est induit de $\gamma^1(\mathbf{K}^\infty)$, c et c' coïncident sur tous les fibrés de rang 1. Par la règle de produit, ils coïncident sur tout fibré qui est somme de fibrés de rang 1.

Soit ξ un fibré sur B, soit $f : B' \to \mathbf{K}P^\infty$ une application qui décompose ξ en somme de fibrés en droites, comme dans le lemme 5.10. Alors $f^*c(\xi) = c(f*\xi) = c'(f*\xi) = f^*c'(\xi)$, ce qui entraîne que $c(\xi) = c'(\xi)$. ∎

C'est argument ne suffit pas pour la classe d'Euler, car les fibrés en droites de la décomposition donnée par le lemme 5.10 ne sont pas orientables.

5.7 Classes de Pontrjagin

En complexifiant un fibré réel, on obtient un fibré complexe, dont les classes de Chern fournissent de nouvelles classes caractéristiques.

Définition 5.11 *Soit ξ un fibré vectoriel réel sur B. Sa i-ème* classe de Pontrjagin *(`Pontrjagin class`) $p_i(\xi) \in H^{4i}(B, \mathbf{Z})$ est définie par*

$$p_i(\xi) = (-1)^i c_{2i}(\xi \otimes \mathbf{C}).$$

La classe de Pontrjagin totale *est $p(\xi) = \sum_i p_i(\xi)$.*

La raison pour laquelle on néglige les classes de Chern de degré impair de $\xi \otimes \mathbf{C}$ est que celles-ci sont d'ordre 2, et donc souvent nulles.

Lemme 5.12 *Soit ξ un fibré complexe, et $\bar{\xi}$ son conjugué. Alors*

$$c_i(\bar{\xi}) = (-1)^i c_i(\xi).$$

En particulier, si η est un fibré réel, $2c_{2i+1}(\eta \otimes \mathbf{C}) = 0$.

Preuve. Définissons des classes caractéristiques c_t et $\bar{c}$ sur les fibrés complexes par

$$c_t(\xi) = \sum_i t^i c_i(\bar{\xi}) \quad \text{et} \quad \bar{c}(\xi) = \sum_i (-1)^i c_i(\bar{\xi}).$$

Alors c_t satisfait l'axiome de produit. En effet, cela consiste à observer que la règle de produit pour c est satisfaite en chaque degré. Par conséquent, $\bar{c}$ satisfait aussi l'axiome de produit.

Comme le dual (ou conjugué, c'est pareil, voir remarque 2.10) $O(-1)$ de γ_1^1 satisfait

$$c_1(\overline{\gamma_1^1}) = c_1(O(-1)) = -h = -c_1(\gamma_1^1),$$

la classe $\bar{c}$ satisfait aussi l'axiome de normalisation. Par unicité, $\bar{c} = c$.

Comme η est isomorphe à son dual, le fibré $\xi = \eta \otimes \mathbf{C}$ est lui aussi isomorphe à son dual. Par conséquent $c_{2i+1}(\xi) = c_{2i+1}(\bar{\xi}) = -c_{2i+1}(\xi)$. ■

Les classes de Pontrjagin satisfont une forme faible de l'axiome de produit.

Proposition 5.13 *Soient ξ, ξ' des fibrés vectoriels réels sur B. Alors*

$$2p(\xi \oplus \xi') = 2p(\xi) \cup p(\xi').$$

Preuve. Comme les classes de Chern impaires $c_{2i+1}(\xi \otimes \mathbf{C})$ sont d'ordre 2 dans le groupe $H^{4i+2}(B, \mathbf{Z})$, lorsqu'on multiplie par 2 la règle de produit pour la classe c_t du lemme 5.12, il ne reste que les classes de Chern d'ordre pair. Il reste à poser $t = \sqrt{-1}$ pour obtenir les bons signes. ■

Exemple 5.14 *La classe de Pontrjagin du fibré tangent de l'espace projectif complexe $\mathbf{C}P^d$ vaut $(1+h^2)^{d+1}$, où h est le dual de Poincaré d'une droite projective.*

Comme le fibré vectoriel réel $\theta = T\mathbf{C}P^d$ possède une structure complexe, son complexifié se décompose en somme de deux sous-fibrés conjugués,

$$\theta \otimes \mathbf{C} = \tau \oplus \bar{\tau}$$

où $\tau = T^{1,0}\mathbf{C}P^d$ est le fibré tangent complexe. Par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_i (-1)^i p_i(\theta) &= c(\theta \otimes \mathbf{C}) \\ &= c(\tau \oplus \bar{\tau}) \\ &= c(\tau)(\sum_i (-1)^i c_i(\tau)) \\ &= (1+h)^{d+1}(1-h)^{d+1} \\ &= (1-h^2)^{d+1}. \end{aligned}$$

En changeant un signe sur deux, on trouve que $p(\theta) = (1+h^2)^{d+1}$.

5.8 Caractère de Chern et produit tensoriel

Comment les classes de Chern se comportent elles vis à vis des produits tensoriels ?

Lemme 5.15 *Soient ξ et ξ' des fibrés vectoriels réels (resp. complexes) de rang 1. Alors*

$$w_1(\xi \otimes \xi') = w_1(\xi) + w_1(\xi'), \quad (resp.\ c_1(\xi \otimes \xi') = c_1(\xi) + c_1(\xi')).$$

Preuve. On se place dans le cas des fibrés complexes. Notons $m_d : \mathbf{C}P^d \times \mathbf{C}P^d \to \mathbf{C}P^{d^2+2d}$ l'application qui à deux droites ℓ et ℓ' de $\mathbf{C}^{d+1}$ associe la droite $\ell \otimes \ell'$ de $\mathbf{C}^{d+1} \otimes \mathbf{C}^{d+1} = \mathbf{C}^{(d+1)^2}$. Elle passe à la limite en $m : \mathbf{C}P^\infty \times \mathbf{C}P^\infty \to \mathbf{C}P^\infty$. Alors

$$m^* : H^2(\mathbf{C}P^\infty, \mathbf{Z}) \to H^2(\mathbf{C}P^\infty \times \mathbf{C}P^\infty, \mathbf{Z}) = H^2(\mathbf{C}P^\infty, \mathbf{Z}) \oplus H^2(\mathbf{C}P^\infty, \mathbf{Z})$$

est donnée par $m^*h = (\alpha h, \beta h)$ où α et β sont des entiers à déterminer.

Si ξ et ξ' sont des fibrés en droites sur B classifiés par des applications f et $f' : B \to G_1(\mathbf{C}^\infty) = \mathbf{C}P^\infty$, alors $\xi \otimes \xi'$ est classifié par $m(f, f')$, donc

$$\begin{aligned}
c_1(\xi \otimes \xi') &= (f, f')^*(\alpha h, \beta h) \\
&= \alpha(f, f')^*(h, 0) + \beta(f, f')^*(0, h) \\
&= \alpha(f, f')^* pr_1^* h + \beta(f, f')^* pr_2^* h \\
&= \alpha(pr_1 \circ (f, f'))^* pr_1^* h + \beta(pr_2 \circ (f, f')^* h \\
&= \alpha f^* h + \beta f'^* h \\
&= \alpha c_1(\xi) + \beta c_1(\xi').
\end{aligned}$$

Or si ξ et ξ' sont des fibré en droites sur $\mathbf{C}P_1$, on sait déjà (exercices 8 et 14) que $c_1(\xi \otimes \xi') = c_1(\xi) + c_1(\xi')$. Cela entraîne que $\alpha = \beta = 1$. Idem pour les fibrés réels et w_1. ■

Définition 5.16 *Pour k entier positif, notons s_k le polynôme en k variables défini par l'identité*

$$\sum_{i=1}^{k} t_i^k = s_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$$

où $\sigma_1 = \sum_{i=1}^k t_i$, ..., $\sigma_k = \prod_{i=1}^k t^i$ sont les fonctions symétriques élémentaires.

Le caractère de Chern *(`Chern character`) d'un fibré vectoriel complexe ξ de rang n est*

$$n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} s_k(c_1(\xi), \ldots, c_k(\xi)).$$

Proposition 5.17 *Soient ξ, ξ' deux fibrés vectoriels complexes sur B. Alors*

$$ch(\xi \oplus \xi') = ch(\xi) + ch(\xi'), \quad ch(\xi \otimes \xi') = ch(\xi) \cup ch(\xi').$$

Preuve. Si ξ est de rang 1,

$$ch(\xi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} c_1(\xi)^k = \exp(c_1(\xi)).$$

Soit ξ' un autre fibré de rang 1. Alors $c_1(\xi \otimes \xi') = c_1(\xi) + c_1(\xi')$. Par conséquent

$$\begin{aligned} ch(\xi \otimes \xi') &= \exp(c_1(\xi) + c_1(\xi')) \\ &= \exp(c_1(\xi)) \cup \exp(c_1(\xi')) \\ &= ch(\xi) \cup ch(\xi'). \end{aligned}$$

Supposons que $\xi = \xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_n$ est une somme de fibrés en droites (on peut toujours se ramener à ce cas par le principe de décomposition 5.10). Posons $t_i = c_1(\xi_i)$. Alors

$$\begin{aligned} c(\xi) &= c(\xi_1) \cup \cdots \cup c(\xi_n) \\ &= (1 + t_1) \cdots (1 + t_n) \\ &= 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n \end{aligned}$$

donc

$$c_i(\xi) = \sigma_i.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} ch(\xi) &= n + \sum_k \frac{1}{k!} s_k(\sigma_1 + \cdots + \sigma_k) \\ &= n + \sum_k \frac{1}{k!} (t_1^k + \cdots + t_n^k) \\ &= \exp(c_1(\xi_1)) + \cdots + \exp(c_1(\xi_n)) \\ &= ch(\xi_1) + \cdots + ch(\xi_n). \end{aligned}$$

Etant donnés deux fibrés ξ et ξ' sur B, il existe $g : B' \to B$ tels que $g^*\xi$ et $g^*\xi'$ soient sommes de fibrés en droites (appliquer le lemme 5.10 à ξ', d'où $f^*\xi' = \xi'_1 \oplus \cdots \oplus \xi'_{n'}$, puis à $f^*\xi$, d'où $f'^*f^*\xi = \xi_{n'+1} \oplus \cdots \oplus \xi_{n+n'}$; poser $g = f \circ f'$, de sorte que $g^*\xi' = \xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_n$ avec $\xi_i = f'^*\xi'_i$). Alors

$$\begin{aligned} g^* ch(\xi \oplus \xi') &= ch(\bigoplus_{i=1}^{n+n'} \xi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n+n'} ch(\xi_i) \\ &= g^*(ch(\xi) + ch(\xi')). \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
g^*ch(\xi \otimes \xi') &= ch(\bigoplus_{i>n', j\leq n'} \xi_i \otimes \xi_j) \\
&= \sum_{i>n', j\leq n'} ch(\xi_i \otimes \xi_j) \\
&= \sum_{i>n', j\leq n'} ch(\xi_i) \cup ch(\xi_j) \\
&= (\sum_{i>n'} ch(\xi_i)) \cup (\sum_{j\leq n'} ch(\xi_j)) \\
&= g^*(ch(\xi) \cup ch(\xi'))
\end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$ch(\xi \oplus \xi') = ch(\xi) + ch(\xi'), \quad \text{et} \quad ch(\xi \otimes \xi') = ch(\xi) \cup ch(\xi'). \blacksquare$$

Il y a une formule analogue pour les classes de Stiefel-Whitney d'un produit tensoriel, mais elle ne prend pas une forme aussi élégante.

Corollaire 5.18 *Un fibré vectoriel réel ξ est orientable si et seulement si $w_1(\xi) = 0$.*

Preuve. Soit ξ un fibré de rang 1 sur B, classifié par $f : B \to \mathbf{R}P^\infty$. Si $w_1(\xi) = f^*(a)$ est nul, alors, d'après le théorème d'Hurewicz, $f_\# : \pi_1(B) \to \pi_1(\mathbf{R}P^\infty)$ est nulle. Par conséquent f se relève au revêtement universel $\mathbf{R}\tilde{P}^\infty = S^\infty$. Mais la sphère de $\mathbf{R}^\infty$ est contractile (tous ses groupes d'homotopie sont nuls), donc f est homotope à une constante, donc ξ est trivial.

Soit ξ un fibré de rang n. Montrons que $w_1(\Lambda^n\xi) = w_1(\xi)$. Grâce au principe de décomposition 5.10, on peut supposer que $\xi = \xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_n$ est une somme de fibrés en droites. Alors $\Lambda^n\xi = \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n$, d'où, avec le lemme 5.15,

$$\begin{aligned}
w_1(\Lambda^n\xi) &= w_1(\xi_1) + \cdots + w_1(\xi_n) \\
&= w_1(\xi).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $w_1(\xi) = 0$ si et seulement si $\Lambda^n\xi$ est trivial, i.e. si et seulement si ξ est orientable. $\blacksquare$

5.9 Liens entre classes caractéristiques

Proposition 5.19 *Soit ξ un fibré vectoriel réel orienté de rang n pair. Alors $w_n(\xi)$ est la réduction modulo 2 de $e(\xi)$.*

Soit ξ un fibré vectoriel complexe de rang n. Si on le voit comme fibré réel de rang $2n$, il possède des classes de Stiefel-Whitney et une classe d'Euler : w_{2i} est la réduction modulo 2 de la classe de Chern c_i, w_{2i+1} est nul et $e(\xi) = c_n(\xi)$.

En particulier, si η est un fibré vectoriel réel, la réduction modulo 2 de $p_i(\eta)$ est $w_{2i}(\eta)^2$. Si, de plus, η est orienté et de rang $n = 2m$ pair, alors $p_m(\eta) = e(\eta)^2$.

Preuve. On admet la première relation.

Cas des fibrés complexes. Le principe de décomposition 5.10 permet de se ramener aux fibrés en droites complexes, la naturalité au fibré tautologique sur $\mathbf{C}P^1$. Or, par normalisation, $e(\gamma_1^{1,\mathbf{C}}) = c_1(\gamma_1^{1,\mathbf{C}})$ et sa réduction modulo 2 est $w_2(\gamma_1^{1,\mathbf{C}})$. On conclut que pour un fibré complexe ξ de rang n,

$$w(\xi) = c(\xi) \bmod 2, \quad e(\xi) = c_n(\xi).$$

On applique cette relation à $\eta \otimes \mathbf{C}$ où η est un fibré vectoriel réel. Réduite modulo 2, $p_i(\eta) = (-1)^i c_{2i}(\eta \otimes \mathbf{C})$ coïncide avec $w_{4i}(\eta \otimes \mathbf{C})$. Or, comme fibré réel, $\eta \otimes \mathbf{C} = \eta \oplus \eta$, d'où

$$\begin{aligned} w(\eta \oplus \eta) &= w(\eta)^2 \\ &= (w_0(\eta) + \cdots + w_n(\eta))^2 \\ &= w_0(\eta)^2 + \cdots + w_n(\eta)^2 \end{aligned}$$

donc $w_{4i}(\eta \otimes \mathbf{C}) = w_{2i}(\eta)^2$.

Enfin, si η est orienté et de rang $2m$, $\eta \otimes \mathbf{C} = \eta \oplus i\eta$ est isomorphe à $\eta \oplus \eta$, mais son orientation (comme fibré complexe) ne coïncide avec la somme des orientations que si m est pair. En effet, si $(e_1, \ldots, e_{2m})$ est une base directe de η, $(e_1, ie_1, \ldots, e_{2m}, ie_{2m})$ est une base directe de $\eta \otimes \mathbf{C}$, elle diffère de $(e_1, \ldots, e_{2m}, ie_1, \ldots, ie_{2m})$ par une permutation de signature $(-1)^m$. Il vient

$$\begin{aligned} p_m(\eta) &= (-1)^m c_{2m}(\eta \otimes \mathbf{C}) \\ &= (-1)^m e(\eta \otimes \mathbf{C}) \\ &= e(\eta \oplus \eta) \\ &= e(\eta)^2. \ \blacksquare \end{aligned}$$

5.10 Nombres caractéristiques

Soit M une variété compacte de dimension n. Soient $r_1, \ldots, r_n$ des entiers positifs tels que $r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n = n$. Alors la classe caractéristique $w_1^{r_1} \cup \cdots \cup w_n^{r_n}$ vit en degré n. Elle peut donc être évaluée sur la *classe fondamentale* (`fundamental class`) en homologie à coefficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ μ_M de M. Les nombres

$$\langle w_1(TM)^{r_1} \cup \cdots \cup w_n(TM)^{r_n}, \mu_M \rangle \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

s'appellent les *nombres de Stiefel-Whitney* de M.

Si de plus M est orientable, la classe d'Euler du fibré tangent TM est bien définie, elle vit en degré n. Elle peut donc être évaluée sur la classe fondamentale en homologie à coefficients entiers, encore notée μ_M. Le *nombre d'Euler* (`Euler number`) de M est

$$\langle e(TM), \mu_M \rangle \in \mathbf{Z}.$$

Si de plus n est divisible par 4, et si $4r_1 + 8r_2 + \cdots + nr_{n/4} = n$, en utilisant la classe fondamentale en homologie à coefficients entiers, on obtient des *nombres de Pontrjagin* (`Pontrjagin numbers`)

$$\langle p_1(TM)^{r_1} \cup \cdots \cup p_{n/4}(TM)^{r_{n/4}}, \mu_M \rangle \in \mathbf{Z}.$$

Enfin, si M est une variété complexe de dimension complexe m, et si $2r_1 + 4r_2 + \cdots + 2mr_m = 2m$, en utilisant la classe fondamentale en homologie à coefficients entiers, on obtient des *nombres de Chern* (`Chern numbers`)

$$\langle c_1(TM)^{r_1} \cup \cdots \cup c_m(TM)^{r_m}, \mu_M \rangle \in \mathbf{Z}.$$

Remarque 5.20 *Si on représente les classes de cohomologie par des formes différentielles (comme on le fera au chapitre suivant), évaluer une n-forme sur la classe fondamentale d'une variété compacte orientable consiste simplement à intégrer cette n-forme.*

6 Quelques applications des classes caractéristiques

6.1 Parallélisabilité

Théorème 3 (E. Stiefel, 1936). *Si l'espace projectif réel $\mathbf{R}P^d$ est parallélisable, nécessairement $d+1$ est une puissance de 2.*

Preuve. En effet, si $d+1$ n'est pas une puissance de 2, l'un au moins des coefficients binômiaux $\binom{d+1}{i}$ pour $i = 1, \ldots, d$ est impair, donc $w(T\mathbf{R}P^d) \neq 1$ et $T\mathbf{R}P^d$ n'est pas trivial. ∎

6.2 Algèbres à division

En fait, on sait montrer depuis les années 60 que seuls $\mathbf{R}P^1$, $\mathbf{R}P^3$ et $\mathbf{R}P^7$ sont parallélisables. La trivialité du fibré tangent à ces trois espace projectifs résulte de l'existence de structures d'algèbres à division sur $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}^8$: il s'agit des nombres complexes, des quaternions et des octaves de Cayley.

Corollaire 6.1 *S'il existe une multiplication $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ sans diviseurs de 0, alors d est une puissance de 2.*

Preuve. Une telle multiplication fournit une parallélisation de $\mathbf{R}P^{d-1}$ comme suit. On fixe une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de $\mathbf{R}^d$. Notons M_i la multiplication par e_i. Etant donnée une droite ℓ de $\mathbf{R}^d$, notons p_ℓ la projection orthogonale sur l'hyperplan orthogonal à ℓ. Pour $i = 2, \ldots, d$, les applications

$$v_i(\ell) : \ell \to \ell^\perp, \quad x \mapsto p_\ell \circ M_i \circ (M_1)^{-1}(x),$$

constituent une base de $Hom(\ell, \ell^\perp)$. On obtient ainsi $d-1$ champs de vecteurs linéairement indépendants sur $\mathbf{R}P^d$. ∎

6.3 Immersions

Toute variété de dimension $d > 1$ admet une immersion dans $\mathbf{R}^{2d-1}$. Lorsque d est une puissance de 2, cette borne est la meilleure possible.

Corollaire 6.2 *Soit $d = 2^r$. Si $\mathbf{R}P^d$ admet une immersion dans $\mathbf{R}^n$, alors $n \geq d - 1$.*

Preuve. Soit τ le fibré tangent, ν le fibré normal d'une immersion de $\mathbf{R}P^d$ dans $\mathbf{R}^{d+k}$. Alors $\tau \oplus \nu$ est trivial, donc $w(\tau) \cup w(\nu) = 1$. Or $w(\tau) = (1+a)^{d+1} = 1+a+a^d$ car les autres coefficients binômiaux sont pairs. Son inverse est $w(\nu) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{d-1}$. Par la propriété de degré, le rang de ν est au moins égal à $d - 1$. ∎

6.4 Cobordisme

Théorème 4 L. Pontrjagin (1947). *Soit M une variété compacte sans bord (resp. orientable). S'il existe une variété compacte W (resp. orientable) telle que $\partial W = M$, alors tous les nombres de Stiefel-Whitney (resp. de Pontrjagin) de M sont nuls.*

Preuve. On donne la preuve dans le cas des nombres de Pontrjagin, en utilisant la cohomologie de de Rham.

Le fibré normal à M est trivial, donc le long de M, $TW_{|M} = TM \oplus \mathbf{R}$. Par naturalité, $p(TW)_{|M} = p(TM \oplus \mathbf{R}) = p(TM)$. Soit α une forme fermée sur W représentant un produit $p_1(TW)^{r_1} \cup \cdots \cup p_{n/4}(TW)^{r_{n/4}}$. Alors la restriction de α à M représente $p_1(TM)^{r_1} \cup \cdots \cup p_{n/4}(TM)^{r_{n/4}}$. Or la formule de Stokes donne

$$\begin{aligned} \langle p_1(TM)^{r_1} \cup \cdots \cup p_{n/4}(TM)^{r_{n/4}}, \mu_M \rangle &= \int_M \alpha \\ &= \int_W d\alpha = 0. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple 6.3 *Le plan projectif complexe $\mathbf{C}P^2$ ne borde pas.*

En effet, d'après l'exemple 5.14, $p_1(\mathbf{C}P^2) = (1 + h^2)^3 = 1 + 3h^2$. h^2 est la classe fondamentale en cohomologie. En effet, c'est le dual de Poincaré de l'intersection de deux droites projectives, qui comporte eactement un point. Par conséquent le nombre de Pontrjagin correspondant vaut 3. Cela prouve que $\mathbf{C}P^2$ ne borde pas de variété orientable. Pour prouver que $\mathbf{C}P^2$ ne borde pas non plus de variété non orientable, on utilise le nombre de Stiefel-Whitney associé à w_4. D'après la proposition 5.19, $w_4(\mathbf{C}P^2)$ est la réduction modulo 2 de $c_2(T^{1,0}\mathbf{C}P^2) = 3h^2$ (exemple 5.9), donc le nombre de Stiefel-Whitney associé vaut $1 \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Exemple 6.4 *En revanche, les espaces projectifs complexes de dimension impaire bordent.*

En effet, la fibration de Hopf qui associe à une droite complexe de $\mathbf{C}^{2d} = \mathbf{H}^d$ la droite quaternionienne qui la contient réalise $\mathbf{C}P^{2d-1}$ comme un fibré sur $\mathbf{H}P^{d-1}$ de fibre $\mathbf{C}P^1$. Comme $\mathbf{C}P^1 = S^2$ borde une boule de dimension 3, $\mathbf{C}P^{2d-1}$ borde un fibré en boules sur $\mathbf{H}P^{d-1}$.

Définition 6.5 *Soient M, M' deux variétés compactes sans bord orientées. On dit que M et M' sont dans la même* classe de cobordisme orienté *s'il existe une variété compacte orientée W telle que $\partial W = M \cup -M'$. On munit l'ensemble des classes de cobordisme orienté de variétés compactes sans bord orientées de deux opérations : la réunion disjointe et le produit cartésien. On obtient ainsi l'*anneau de cobordisme orienté *(`oriented cobordism ring`) Ω_*. C'est un anneau gradué commutatif (au sens des anneaux gradués, i.e. $M'M = (-1)^{\mathrm{deg}M\mathrm{deg}M'} MM'$).*

Théorème 5 R. Thom (1954). *L'anneau $\Omega_* \otimes \mathbf{Q}$ est une algèbre de polynômes engendrée par les espaces projectifs complexes de dimension paire.*

Exemple 6.6 *Le théorème affirme que $\Omega_4 \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{Q}$ engendré par $\mathbf{C}P^2$, $\Omega_8 \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^2$ engendré par $\mathbf{C}P^4$ et $\mathbf{C}P^2 \times \mathbf{C}P^2$, etc... et que les Ω_n pour n non multiple de 4 sont finis. En fait, $\Omega_0 = \mathbf{Z}$, $\Omega_4 = \mathbf{Z}$, $\Omega_5 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $\Omega_8 = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, les autres Ω_n avec $n \leq 8$ sont nuls.*

La preuve du théorème 5 consiste, d'une part, à réaliser toute variété compacte sans bord orientée M comme l'image réciproque de la section nulle par une application de la sphère S^{n+k} dans l'espace $E(\gamma^k(\mathbf{R}^\infty))$ compactifié (utiliser l'application classifiante du fibré normal d'un plongement de M dans S^{n+k}). La classe de cobordisme de cette image réciproque ne dépend que de la classe d'homotopie de l'application. Or on sait calculer les groupes d'homotopie en jeu. D'autre part, à montrer que les espaces projectifs complexes de dimension paire sont algébriquement indépendants. Pour celà, on utilise les nombres de Pontrjagin : en chaque dimension n multiple de 4, il y en a autant que de monômes de degré n en les $\mathbf{C}P^{2d}$. Cela donne le corollaire suivant.

Corollaire 6.7 *Soit M une variété compacte orientée sans bord. Alors la réunion d'un nombre fini de copies de M borde une variété compacte orientable si et seulement si tous les nombres de Pontrjagin de M sont nuls.*

6.5 Lien avec la caractéristique d'Euler-Poincaré

Définition 6.8 *Soit B un espace compact raisonnable (variété, complexe simplicial, CW-complexe fini...). La* caractéristique d'Euler-Poincaré *(`Euler characteristic`) de B est la somme alternée des dimensions des espaces d'homologie réelle,*

$$\chi(B) = \sum_i \mathrm{dim} H_i(B, \mathbf{R}).$$

Remarque 6.9 *Si B est un complexe simplicial, $\chi(B)$ est égal à la somme alternée des nombres de simplexes en chaque dimension.*

Théorème 6 H. Hopf. *Soit M une variété compacte sans bord. Soit V un champ de vecteurs sur M. On suppose V transverse à la section nulle, de sorte qu'en chacun des zéros de V, la différentielle ∇V est inversible. Il y a donc un signe, le signe de* $\det\nabla V$*, associé à chaque zéro (ce signe ne dépend pas d'un choix d'orientation locale de M). Le nombre de zéros de V, comptés avec signe, est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré de M. En particulier, si M est orientable, le nombre d'Euler de M est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré de M.*

Preuve. Elle sera donnée au chapitre suivant. ∎

6.6 Lien avec la signature

Définition 6.10 *Soit M une variété compacte sans bord orientée de dimension n multiple de 4. Le cup-produit définit une application bilinéaire symétrique sur $H^{n/2}(M,\mathbf{R})$ à valeurs dans $H^n(M,\mathbf{R})$. En l'évaluant sur la classe fondamentale, on obtient une forme quadratique. La signature σ = nombre de $+$ moins nombre de $-$ de cette forme quadratique s'appelle la* signature *(`signature`) de M.*

Exemple 6.11 *La signature de l'espace projectif complexe $\mathbf{C}P^{2d}$ vaut 1.*

En effet, $H^d(\mathbf{C}P^{2d},\mathbf{R})$ est de dimension 1, engendré par h^d, et $\langle h^d \cup h^d, \mu\rangle = 1$.

Théorème 7 R. Thom, F. Hirzebruch (1954). *Soit M une variété compacte sans bord orientée de dimension n multiple de 4. La signature de M s'exprime en fonction des classes de Pontrjagin de M : $\sigma(M) = L_{n/4}(p_1,\dots p_{n/4})$ où $L_1 = \frac{1}{3}p_1$, $L_2 = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)$, etc... En général, les polynômes L_k sont déterminés par l'équation*

$$\frac{\sqrt{t_1}}{\tanh(\sqrt{t_1})}\cdots\frac{\sqrt{t_k}}{\tanh(\sqrt{t_k})} = 1 + L_1(\sigma_1) + L_2(\sigma_1,\sigma_2) + \cdots$$

où les σ_i sont les fonctions symétriques élémentaires en les t_i.

Preuve.

La signature est additive par réunion disjointe, multiplicative par produit cartésien, et nulle pour les variétés qui bordent une variété orientée. Par conséquent, elle induit un homomorphisme d'algèbres $\Omega_* \otimes \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$. D'après le théorème 5, il suffit de vérifier que pour chaque espace projectif complexe de dimension paire $\mathbf{C}P^{2d}$, le nombre de Pontrjagin associé à la classe L_d vaut 1, signature de $\mathbf{C}P^{2d}$. Connaissant les classes de Pontrjagin de $\mathbf{C}P^{2d}$, cette vérification est combinatoire. ∎

Il existe des preuves plus directes et moins magiques. Les théorèmes 6 et 7 sont des cas particuliers du théorème de l'indice de M. Atiyah et I. Singer, dont on peut donner une preuve ne reposant pas sur le théorème 5, voir

N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Springer-Verlag, Berlin, (1992).