Chapitre 3 : Courbure

Pierre Pansu

July 12, 2005

On s'intéresse au développement limité d'une métrique dans ses coordonnées normales (i.e. de la métrique sur l'espace tangent obtenue en transportant par l'exponentielle la métrique donnée). On devine que les termes de ce développement seront des invariants significatifs.

Le Lemme de Gauss constitue une première étape. Il énonce que, dans la direction radiale, il n'y a pas de différence entre une métrique quelconque et une métrique euclidienne. La différence apparaît dans les directions transverses, elle est mesurée par la *courbure*, concept central de la géométrie riemannienne.

On va introduire la courbure de façon plus formelle, comme défaut de commutation des dérivées covariantes secondes.

1 Une première définition de la courbure

1.1 Dérivées covariantes secondes

Pour dériver en $P \in M$ une fonction f dans une direction $v \in T_P M$, il suffit de dériver f le long de n'importe quelle courbe c telle que $c(0) = P$ et $c'(0) = v$.

Pour calculer une dérivée seconde, on ne peut pas prendre n'importe quelle courbe, car le résultat dépend de la dérivée seconde $c''(0)$. Dans l'espace euclidien, on définit

$$(d_v^2 f)(P) = \frac{d}{dt} f(P + tv)_{|t=0},$$

autrement dit, on dérive le long des droites. En géométrie riemannienne, on n'a qu'à dériver le long des géodésiques.

Définition 1.1 *Soit M une variété munie d'une connexion ∇ sur le fibré tangent. Soit $P \in M$, $v \in T_v M$, f une fonction définie au voisinage de P. On définit la dérivée seconde de f en P par*

$$(\nabla_v^2 f)(P) = \frac{d}{dt} f(\exp_P(tv))_{|t=0}.$$

Lemme 1.2 *Soit V un champ de vecteurs, soit f une fonction. Alors*

$$\nabla_V^2 f = \nabla_V(\nabla_V f) - \nabla_{\nabla_V V} f. \qquad (1)$$

Preuve. On remarque que, si g est une fonction, alors

$$\nabla_{gV}(\nabla_{gV}f) - \nabla_{\nabla_{gV}gV}f = g^2(\nabla_V(\nabla_V f) - \nabla_{\nabla_V V}f).$$

Cela montre que la valeur de $\nabla_V(\nabla_V f) - \nabla_{\nabla_V V}f$ en un point P ne dépend que de la valeur $v = V(P)$ de V en P et non des dérivées du champ V. Soit T un champ de vecteurs tel que $T(P) = v$ et tel que la ligne intégrale de T issue de P soit la géodésique $t \mapsto \exp_{tv}$. Alors $(\nabla_T T)(P) = 0$, et

$$\begin{aligned}
(\nabla_V(\nabla_V f) - \nabla_{\nabla_V V}f)(P) &= (\nabla_T(\nabla_T f) - \nabla_{\nabla_T T}f)(P) \\
&= (\nabla_T(\nabla_T f))(P) \\
&= \frac{d}{dt}f(\exp_P(tv))_{|t=0} \\
&= (\nabla_V^2 f)(P).
\end{aligned}$$

Cela suggère la définition suivante.

Définition 1.3 *Soit Z un champ de tenseurs sur M. Soit $P \in M$, soient v, $w \in T_P M$. On prolonge w en un champ de vecteurs W défini au voisinage de P et on pose*

$$(\nabla^2_{v,w}Z)(P) = (\nabla_v(\nabla_W Z) - \nabla_{\nabla_v W}Z)(P).$$

On vérifie que le résultat ne dépend pas du choix du prolongement W.

1.2 Torsion, hessien et laplacien

On est habitué à ce que les dérivées partielles secondes commutent, i.e. dans l'espace euclidien,

$$d^2_{v,w}f = d^2_{w,v}f.$$

Qu'en est-il pour les dérivées secondes définies au moyen d'une connexion ? C'est encore vrai si (et seulement si) la connexion est *sans torsion*, pour les fonctions.

Exercice 1 *Soit M une variété munie d'une connexion ∇, V et W des champs de vecteurs, f une fonction sur M. Montrer que $\nabla^2_{V,W}f - \nabla^2_{W,V}f = -\nabla_{T(V,W)}f$.*

Définition 1.4 *Soit M une variété riemannienne, soit $P \in M$ et soit f une fonction définie au voisinage de P. La forme bilinéaire symétrique*

$$\nabla^2 f : (v, w) \mapsto \nabla^2_{v,w}f(P)$$

s'appelle le hessien *de f en P. Le* laplacien *de f est*

$$\Delta f = -trace(\nabla^2 f) = -\sum_{i=1}^{n} \nabla^2_{e_i,e_i}f.$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $T_P M$.

Attention au signe : dans l'espace euclidien de dimension n, le laplacien ainsi défini vaut $-(\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n})$.

1.3 Courbure

En revanche, les dérivées covariantes secondes de champs de vecteurs ne commutent pas en général.

Définition 1.5 *Soit ∇ une connexion sans torsion sur le fibré tangent de M. Soit $P \in M$. Soient v, w, $z \in T_P M$. On prolonge z en un champ de vecteurs Z défini au voisinage de P et on pose*

$$R_{v,w}z = (\nabla^2_{v,w}Z - \nabla^2_{w,v}Z)(P).$$

On vérifie que le résultat ne dépend pas du choix du prolongement Z. Le tenseur de type $(3,1)$ obtenu s'appelle la courbure *de la connexion ∇.*

Remarque 1.6 *Si V, W, Z sont trois champs de vecteurs, on a*

$$R_{V,W}Z = \nabla_V \nabla_W Z - \nabla_W \nabla_V Z - \nabla_{[V,W]}Z.$$

1.4 Propriétés

Par construction R est antisymétrique en (v,w),

$$R_{v,w} = -R_{w,v}. \tag{2}$$

On peut y penser comme à une 2-forme différentielle sur M à valeurs dans le fibré $End(TM)$.

Si la connexion ∇ est métrique, alors pour tous (v,w), $R_{v,w}$ est un endomorphisme antisymétrique de l'espace tangent, i.e.

$$(R_{v,w}z) \cdot u = -(R_{v,w}u) \cdot z. \tag{3}$$

Si la connexion ∇ est sans torsion, alors R satisfait la *première identité de Bianchi*

$$R_{v,w}z + R_{w,z}v + R_{z,v}w = 0. \tag{4}$$

Exercice 2 *Démontrer la première identité de Bianchi $R_{v,w}z + R_{w,z}v + R_{z,v}w = 0$.*

En combinant l'identité de Bianchi avec l'antisymétrie, on obtient la symétrie par paires,

$$(R_{v,w}z) \cdot u = (R_{z,y}v) \cdot w. \tag{5}$$

Proposition 1.7 *Soit g et $g' = e^{2f}g$ deux métriques riemanniennes sur M qui sont conformes. Soient v, w deux vecteurs orthonormés pour la métrique g. Alors les courbures de g et de g' sont reliées par*

$$\begin{aligned} e^{-2f}R'_{v,w}w \cdot' v &= R_{v,w}w \cdot v - \nabla^2_{v,v}f - \nabla^2_{w,w}f & (6)\\ &\quad -|\nabla f|^2 + (\nabla_v f)^2 + (\nabla_w f)^2. & (7) \end{aligned}$$

Preuve. Soient V, W, Z trois champs de vecteurs quelconques. On va calculer $R'_{V,W}Z$. On utilise la relation entre les connexions de Levi-Civita

$$\nabla'_A B = \nabla_A B + (\nabla_A f)B + (\nabla_B f)A - (A \cdot B)\nabla f \tag{8}$$

où ∇f est le gradient de f et $\nabla_A f = df(A) = A \cdot \nabla f$. On l'applique d'abord à $A = V$ et $B = \nabla'_W Z$.

$$\begin{aligned} \nabla'_V \nabla'_W Z &= \nabla_V \nabla'_W Z + (\nabla_V f)\nabla'_W Z + (\nabla_{\nabla'_W Z} f)V - (V \cdot \nabla'_W Z)\nabla f & (9) \\ &= (1) + (2) + (3) + (4). & (10) \end{aligned}$$

Puis on développe

$$\nabla'_W Z = \nabla_W Z + (\nabla_W f)Z + (\nabla_Z f)W - (W \cdot Z)\nabla f$$

dans chacun des quatre termes de l'équation 9.

$$\begin{aligned} (1) &= \nabla_V \nabla'_W Z \\ &= \nabla_V \nabla_W Z \\ &\quad +(\nabla_V \nabla_W f)Z + (\nabla_W f)\nabla_V Z \\ &\quad +(\nabla_V \nabla_Z f)W + (\nabla_Z f)\nabla_V W \\ &\quad -((\nabla_V W) \cdot Z)\nabla f - (W \cdot (\nabla_V Z))\nabla f - (W \cdot Z)\nabla_V \nabla f. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) &= (\nabla_V f)\nabla'_W Z \\ &= (\nabla_V f)\nabla_W Z + (\nabla_V f)(\nabla_W f)Z + (\nabla_V f)(\nabla_Z f)W - (\nabla_V f)(W \cdot Z)\nabla f. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) &= (\nabla_{\nabla'_W Z} f)V \\ &= (\nabla_{\nabla_W Z} f)V + (\nabla_W f)(\nabla_Z f)V + (\nabla_Z f)(\nabla_W f)V - (W \cdot Z)(\nabla_{\nabla f} f)V. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) &= -(V \cdot \nabla'_W Z)\nabla f \\ &= -(V \cdot \nabla_W Z)\nabla f - (\nabla_W f)(V \cdot Z)\nabla f - (\nabla_Z f)(V \cdot W)\nabla f \\ &\quad +(W \cdot Z)(V \cdot \nabla f)\nabla f. \end{aligned}$$

La courbure $R'_{V,W}Z$ est la somme de 44 termes, les 20 termes dont la somme donne $\nabla'_V \nabla'_W Z$, puis 20 termes identiques aux précédents à l'échange de V et W et au signe près, et les quatre termes de

$$-\nabla'_{[V,W]}Z = -\nabla_{[V,W]}Z - (\nabla_{[V,W]}f)Z - (\nabla_Z f)[V,W] + ([V,W] \cdot Z)\nabla f.$$

Dans le résultat, il ne doit pas y avoir de dérivées covariantes des champs V, W ou Z. Elles doivent être absorbées par les crochets de Lie. Par conséquent, il n'y a pas lieu de suivre à la trace les 7 termes de ce type figurant dans $\nabla'_V \nabla'_W Z$ (si ce n'est pour s'assurer qu'on ne perd rien en route). De plus, parmi les 13 autres termes de $\nabla'_V \nabla'_W Z$, il y en a trois qui sont symétriques en V et W, ce sont

$\nabla_V\nabla_W f$, $(\nabla_V f)(\nabla_W f)Z$ et $(\nabla_Z f)(V\cdot W)\nabla f$ qui disparaissent donc dans le résultat. On trouve aussi deux paires symétriques de termes, ce sont $-(\nabla_V f)(W\cdot Z)\nabla f - (\nabla_W f)(V\cdot Z)\nabla f$ et $(\nabla_W f)(\nabla_Z f)V + (\nabla_V f)(\nabla_Z f)W$, qui vont disparaître aussi. Enfin $\nabla_V\nabla_W Z - \nabla_W\nabla_V Z = R_{V,W}Z$. Il reste donc les 11 termes suivants

$$
\begin{aligned}
R'_{V,W}Z &= R_{V,W}Z + (\nabla_V\nabla_Z f)W - (\nabla_W\nabla_Z f)V - (W\cdot Z)(\nabla_V\nabla f) && (11)\\
&\quad +(V\cdot Z)(\nabla_W\nabla f) + (\nabla_W f)(\nabla_Z f)V - (\nabla_V f)(\nabla_Z f)W && (12)\\
&\quad +(V\cdot Z)(\nabla_{\nabla f} f)W - (W\cdot Z)(\nabla_{\nabla f} f)V + (W\cdot Z)(\nabla_V f)\nabla f && (13)\\
&\quad -(V\cdot Z)(\nabla_W f)\nabla f. && (14)
\end{aligned}
$$

Désormais, on suppose V et $W = Z$ unitaires et orthogonaux pour la métrique g. Il ne reste que 8 termes,

$$
\begin{aligned}
R'_{V,W}W &= R_{V,W}W + (\nabla^2_{V,W} f)W - (\nabla^2_{W,W} f)V - \nabla_V\nabla f\\
&\quad +(\nabla_W f)^2 V - (\nabla_V f)(\nabla_W f)W - |\nabla f|^2 + (\nabla_V f)\nabla f.
\end{aligned}
$$

Il vient

$$
\begin{aligned}
e^{-2f}R'_{V,W}W \cdot' V &= R'_{V,W}W\cdot V && (15)\\
&= R_{V,W}W\cdot V - (\nabla^2_{W,W} f) + (\nabla_W f)^2 - |\nabla f|^2 && (16)\\
&\quad +(\nabla_V f)^2 - (\nabla_V\nabla f)\cdot V. && (17)
\end{aligned}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
\nabla^2_{V,V} f &= \nabla_V(\nabla f\cdot V) - \nabla_{\nabla_V V} f\\
&= (\nabla_V\nabla f)\cdot V + \nabla f\cdot(\nabla_V V) - \nabla_{\nabla_V V} f\\
&= (\nabla_V\nabla f)\cdot V.
\end{aligned}
$$

On trouve que

$$
\begin{aligned}
e^{-2f}R'_{V,W}W \cdot' V &= R_{V,W}W\cdot V - \nabla^2_{V,V} f - \nabla^2_{W,W} f && (18)\\
&\quad -|\nabla f|^2 + (\nabla_V f)^2 + (\nabla_W f)^2.\ \blacksquare && (19)
\end{aligned}
$$

1.5 La courbure en dimension 2

Proposition 1.8 *Le tenseur de courbure en un point d'une variété riemannienne de dimension 2 est déterminé par un seul nombre K tel que*

$$(R_{v,w}z)\cdot u = -K\, vol(v,w)vol(z,u) \qquad (20)$$

On l'appelle courbure de Gauss. *Si (e_1, e_2) est une base orthonormée du plan tangent, alors $K = (R_{e_1,e_2}e_2)\cdot e_1$.*

Preuve. Par antisymétrie, $(R_{v,w}z)\cdot u$ est un multiple, dépendant de v et w seulement, de $vol(z,u)$, soit $(R_{v,w}z)\cdot u = R(v,w)vol(z,u)$. De nouveau par antisymétrie, le nombre $R(v,w)$ est un multiple de $vol(v,w)$. $\blacksquare$

Exercice 3 *Vérifier que la courbure de Gauss d'une métrique écrite en coordonnées polaires* $dr^2 + f(r,\theta)^2 d\theta^2$ *vaut* $K = -f^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$.

Exercice 4 *Calculer la courbure de Gauss de la sphère unité de* $\mathbf{R}^3$.

Exercice 5 *Vérifier que si deux métriques riemanniennes* $g' = \lambda^2 g$ *en dimension 2 sont proportionnelles, alors leurs courbures de Gauss sont reliées par* $K' = \lambda^{-2} K$.

Exercice 6 *Vérifier que si deux métriques riemanniennes* $g' = e^{2f} g$ *en dimension 2 sont conformes, alors leurs courbures de Gauss sont reliées par* $K' = e^{-2f}(K + \Delta f)$.

Exercice 7 *Vérifier que la courbure de Gauss de la métrique de Poincaré* $\frac{16(dx^2+dy^2)}{(4-x^2-y^2)^2}$ *du disque de rayon 2 vaut* $K = -1$.

1.6 Courbure des sous-variétés

Théorème 1 Equation de Gauss. *Soit* $N \subset M$ *une sous-variété munie de la métrique induite. Soit* $P \in N$, *soient* v, w, z, u *des vecteurs tangents à* N *en* P. *Alors*

$$(R^N_{v,w} z) \cdot u = (R^M_{v,w} z) \cdot u + II(w,z) \cdot II(v,u) - II(v,z) \cdot II(w,u). \tag{21}$$

Preuve. Soient V, W, Z, U des champs de vecteurs tangents à N et ν un champ de vecteurs sur M, normal à N le long de N. En vue d'un usage ultérieur, on calcule la composante tangentielle de la dérivée covariante (au sens de la connexion de Levi-Civita ∇^M de M) du champ normal ν. De

$$\begin{aligned} 0 &= d(\nu \cdot U)(V) \\ &= (\nabla^M_V \nu) \cdot U + \nu \cdot (\nabla^M_V U) \\ &= (\nabla^M_V \nu) \cdot U + \nu \cdot II(V,U), \end{aligned}$$

on tire

$$(\nabla^M_V \nu) \cdot U = -\nu \cdot II(V,U).$$

On applique cette formule à $\nu = II(W,Z)$.

$$\nabla^M_V \nabla^M_W Z = \nabla^M_V \nabla^N_W Z + \nabla^M_V II(W,Z)$$

d'où

$$\begin{aligned} (\nabla^M_V \nabla^M_W Z) \cdot U &= (\nabla^M_V \nabla^N_W Z) \cdot U + (\nabla^M_V II(W,Z)) \cdot U \\ &= (\nabla^M_V \nabla^N_W Z) \cdot U - II(W,Z) \cdot II(V,U) \\ &= (\nabla^N_V \nabla^N_W Z) \cdot U - II(W,Z) \cdot II(V,U). \end{aligned}$$

Par définition,

$$\begin{aligned} (R^M_{V,W} Z) \cdot U &= (\nabla^M_V \nabla^M_W Z) \cdot U - (\nabla^M_W \nabla^M_V Z) \cdot U - (\nabla^M_{[V,W]} Z) \cdot U \\ &= (\nabla^N_V \nabla^N_W Z) \cdot U - II(W,Z)) \cdot II(V,U) \\ &\quad -(\nabla^N_W \nabla^N_V Z) \cdot U + II(V,Z)) \cdot II(W,U) - (\nabla^N_{[V,W]} Z) \cdot U \\ &= (R^N_{V,W} Z) \cdot U - II(W,Z) \cdot II(V,U) + II(V,Z) \cdot II(W,U). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exercice 8 *Démontrer le* Theorema Egregium *de Gauss, i.e. le fait que le produit des courbures principales d'une surface de* $\mathbf{R}^3$ *est égal à la courbure de Gauss intrinsèque, i.e. définie uniquement à partir de la première forme fondamentale.*

2 Courbure et métrique en coordonnées normales

Soit M une variété riemannienne, soit $P \in M$. Il s'agit de donner un développement limité de la métrique $\exp_P{}^* g_M$ sur l'espace tangent $T_P M$ au voisinage de 0. On a besoin de la différentielle, ailleurs qu'en 0, de l'application exponentielle. Comme $\exp_P$ est la solution de l'équation des géodésique, sa différentielle est solution de l'*équation aux variations* de l'équation des géodésiques. C'est une équation linéaire du second ordre portant sur un champ de vecteurs le long d'une géodésique, appelée *équation de Jacobi.*

2.1 Champs de Jacobi

Proposition 2.1 *Soit $s \mapsto \gamma_s$ une famille de géodésiques, soit $T = \gamma_0'(t)$ le champ de vecteurs tangent à γ_0, soit V la* variation *de la famille γ_s, i.e. le champ de vecteurs le long de γ_0 défini par*

$$V(t) = \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s}_{|s=0}.$$

Alors V satisfait

$$\nabla_T \nabla_T V + R_{V,T} T = 0. \tag{22}$$

Inversement, soit V un champ de vecteurs le long de γ_0 qui satisfait 22. Alors il existe une famille γ_s de géodésiques dont V est la variation.

Preuve. Les champs $V = \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s}$ et $T = \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial t}$, définis le long de l'application $\gamma : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to M$, commutent, i.e. $[V, T] = 0$. Par hypothèse, T est géodésique le long de chaque γ_s, donc $\nabla_T T = 0$. En dérivant par rapport à s, il vient

$$\nabla_V \nabla_T T = 0.$$

La définition de la courbure donne

$$\begin{aligned} R_{V,T} T &= \nabla_V \nabla_T \nabla_T T - \nabla_T \nabla_V T \\ &= 0 - \nabla_T \nabla_T V \end{aligned}$$

d'où l'équation $\nabla_T \nabla_T V + R_{V,T} T = 0$.

Inversement, soit γ_0 une géodésique, T sa vitesse, et V un champ de vecteurs le long de γ_0 qui satisfait l'équation 22. Soit $s \mapsto c(s)$ une courbe dans M telle que

$c(0) = \gamma_0(0)$ et $c'(0) = V(0)$. Soit U (resp. W) le transport parallèle de $T(0)$ (resp. de $\nabla_T V(0)$) le long de c. posons

$$\gamma_s(t) = \exp_{c(s)}(t(U + sW)).$$

Notons $\tilde{V} = \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s}$ la variation de cette famille de géodésiques, et $\tilde{T}\frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial t}$. On calcule

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(0) &= \frac{\partial}{\partial s} \exp_{c(s)}(0)_{|s=0} \\
&= c'(0) \\
&= V(0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_T \tilde{V}(0) &= \nabla_{\tilde{T}} \tilde{V}(0,0) \\
&= \nabla_{\tilde{V}} \tilde{T}(0,0) \\
&= \nabla_{c'(0)} \tilde{T}(0,0) \\
&= \nabla_{c'(0)}(U + sW)_{|s=0} \\
&= W(0) \\
&= \nabla_T V(0).
\end{aligned}$$

Ecrits dans un repère formé de champs de vecteurs parallèles le long de γ_0, les champs V et $\tilde{V}$ sont tous deux solutions de l'équation 22, de la forme $V'' = -R_{V,T}T$. Ils ont la même valeur et la même dérivée en 0 donc ils coïncident partout. ∎

Définition 2.2 *Soit γ une géodésique dans M. Un champ de vecteurs le long de γ qui satisfait l'équation 22 est appelé* champ de Jacobi. *Les champs de Jacobi le long de γ forment un espace vectoriel de dimension $2\dim(M)$.*

Remarque 2.3 *Le long d'une géodésique γ, les champs de vecteurs $T = \gamma'(t)$ et tT sont des solutions de l'équation de Jacobi. Ils correpondent aux reparamétrisations affines de γ. Si V est un champ de Jacobi et si $V(0) \cdot T(0) = \nabla_T V(0) \cdot T(0) = 0$, alors $V(t) \cdot T(t) = 0$ pour tout t.*

En effet,

$$\frac{d}{dt} V(t) \cdot T(t) = \nabla_T V \cdot T,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} V(t) \cdot T(t) &= \nabla_T \nabla_T V \cdot T \\
&= -(R_{V,T}T) \cdot T \\
&= 0
\end{aligned}$$

par antisymétrie.

Exercice 9 *Soit M une variété riemannienne de dimension 2. On écrit sa métrique en coordonnées polaires, i.e. sous la forme $dr^2 + f(r,\theta)^2\, d\theta^2$. En utilisant l'équation de Jacobi, montrer que la courbure vaut $K = -f^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$.*

2.2 Développement limité

Théorème 2 *Soit M une variété riemannienne, P un point de M. Notons S^{n-1} la sphère unité de $T_P M$.*

1. *En coordonnées polaires $(r, v) \mapsto rv$, $\mathbf{R}_+ \times S^{n-1} \to T_P M$,*

$$\exp_P{}^*(g_M) = dr^2 + g_r$$

où, en un point $v \in S^{n-1}$ de la sphère unité, et pour un vecteur $w \in T_v S^{n-1}$ tangent à la sphère en v,

$$g_r(w) = |w|^2 r^2 - \frac{1}{3}((R_{w,v}v) \cdot w)r^4 + o(r^4). \tag{23}$$

2. *Choisissons des coordonnées cartésiennes $(x_1, \ldots, x_n)$ sur $T_P M$. Notons*

$$R_{ijkl} = (R_{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Alors

$$\exp_P{}^*(g_M) = \sum_{i,j} (\delta_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{k,l} R_{iklj} x_k x_l + o(|x|^2))\, dx_i\, dx_j.$$

Preuve. Soit $s \mapsto v(s)$ une courbe tracée dans la sphère unité de $T_P M$, telle que $v(0) = v$ et $v'(0) = w$. Soit $\gamma_s(t) = \exp_P(tv(s))$, soit W la variation de cette famille de géodésiques. C'est un champ de Jacobi de conditions initiales $W(0) = 0$ et

$$\begin{aligned} \nabla_T W(0) &= \nabla_W T(0,0) \\ &= v'(0) \\ &= w. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} d_{rv} \exp_P(w) &= \frac{\partial}{\partial s} \gamma_s(r)_{|s=0} \\ &= W(r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_r(w) &= \exp_P{}^*(g_M)(w) \\ &= g_M(d_{rv} \exp_P(w)) \\ &= |W(r)|^2. \end{aligned}$$

Calculons les dérivées successives de la fonction $r \mapsto S(r) = |W(r)|^2$. On note $W' = \nabla_T W$, $W'' = \nabla_T \nabla_T W$, etc... les dérivées covariantes successives du champ W, de sorte que l'équation de Jacobi se lise $W'' + R_{W,T} T = 0$. Alors $S' = 2W' \cdot W$,

$S'' = 2W'' \cdot W + 2W' \cdot W'$, $S^{(3)} = 2W^{(3)} \cdot W + 6W'' \cdot W'$, $S^{(4)} = 2W^{(4)} \cdot W + 8W^{(3)} \cdot W' + 6W'' \cdot W''$. Il vient $S'(0) = 0$, $S''(0) = 2|w|^2$,

$$\begin{aligned} S^{(3)}(0) &= 6W''(0) \cdot W'(0) \\ &= -6(R_{W,T}T) \cdot w \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^{(4)}(0) &= 8W^{(3)}(0) \cdot W'(0) + 6W''(0) \cdot W''(0) \\ &= 8W^{(3)}(0) \cdot W'(0). \end{aligned}$$

car $W''(0) = (R_{W,T}T)(0) = 0$. Or

$$\begin{aligned} W'''(0) &= -\nabla_T(R_{W,T}T)(0) \\ &= -(\nabla_T R)_{W,T}T)(0) - (R_{\nabla_T W,T}T)(0) - (R_{W,\nabla_T T}T)(0) - (R_{W,T}\nabla_T T)(0) \\ &= -R_{W'(0),T(0)}T(0) \\ &= -R_{w,v}v, \end{aligned}$$

d'où $S^{(4)}(0) = -8(R_{w,v}v) \cdot w$. Avec la formule de Taylor, il vient

$$\begin{aligned} g_r(w) &= S(r) \\ &= |w|^2 r^2 - \frac{8}{4!}((R_{w,v}v) \cdot w)r^4 + o(r^4). \end{aligned}$$

En coordonnées normales, la forme quadratique g_P à coefficients constants sur l'espace tangent s'écrit

$$g_P = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 = \sum_{i,j} \delta_{ij}\, dx_i\, dx_j.$$

Soit $x = \sum_k x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ un point de $T_P M$ situé à distance r de l'origine, $x = rv$. Soit $y = \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ un vecteur de $T_P M$, $y = rw$ où $w \in T_v S^{n-1}$. Alors

$$\begin{aligned} {\exp_P}^* g_M(y) &= |rw|^2 - \frac{1}{3}((R_{w,v}v) \cdot w)r^4 + o(r^4) \\ &= g_P(y) - \frac{1}{3}(\sum_{i,j,k,l} R_{iklj} y_i x_k x_l y_j) + o(r^4), \end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$${\exp_P}^* g_M = \sum_{i,j} \delta_{ij}\, dx_i\, dx_j - \frac{1}{3}(\sum_{i,j,k,l} R_{iklj} x_k x_l + o(|x|^2))\, dx_i\, dx_j.$$

Comme $(R_{y,x}x) \cdot y) = 0$ si y est colinéaire à x, et ${\exp_P}^* g_M(y) = |y|^2$ dans ce cas, d'après le lemme de Gauss, la formule reste vraie même si y n'est pas orthogonal à x. ∎

Interprétation. Si le terme $(R_{w,v}v)\cdot w$ est positif, la métrique $\exp_P{}^*g_M$ est plus petite que la métrique euclidienne, cela signifie que les géodésiques se rapprochent plus les unes des autres qu'en géométrie euclidienne. Imaginons la métrique riemannienne comme un milieu transparent qui, en raison de son indice variable (et non isotrope) dévie les rayons lumineux. La métrique euclidienne sur l'espace tangent représente la prévision que fait un observateur qui ignore l'existence du milieu déformant. La métrique g_M joue donc le rôle d'une loupe convergente si $(R_{w,v}v)\cdot w > 0$, divergente si $(R_{w,v}v)\cdot w < 0$.

Exercice 10 *Soit M une variété riemannienne de dimension 2, $P \in M$, C_r le lieu des points de M dont la distance à P est égale à r. Montrer que*

$$\mathrm{Long}(C_r) = 2\pi r - \frac{\pi}{3}K(P)r^3 + o(r^3)$$

où $K(P)$ est la courbure de Gauss en P.

2.3 Courbure sectionnelle

On constate que ce qui intervient dans le développement limité de la métrique en coordonnées normales, c'est uniquement des expressions de la forme $(R_{w,v}v)\cdot w$. On les appelle des courbures sectionnelles.

Définition 2.4 *Soit M une variété riemannienne, P un point de M, π un plan vectoriel contenu dans T_PM. La* courbure sectionnelle *de π est l'expression*

$$K(\pi) = (R_{w,v}v)\cdot w$$

où (v, w) est une base orthonormée de π.

Remarque 2.5 *On peut montrer que la courbure sectionnelle des plans de T_pM détermine entièrement le tenseur de courbure de M au point P.*

Voir la formule démente (14 termes) dans le livre de Cheeger et Ebin, page 16.

Exercice 11 *Soit M une variété riemannienne, P un point de M, π un plan vectoriel contenu dans T_PM. Notons $N_\pi = \exp_P(\pi)$ la surface balayée par les géodésiques tangentes à π. Vérifier que la courbure sectionnelle $K(\pi)$ est égale à la courbure de Gauss de N_π.*

Exercice 12 *Soit M une variété munie de deux métriques riemanniennes conformes g et $g' = e^{2f}g$. Soit P un point de M, π un plan vectoriel contenu dans T_PM. Vérifier que les courbures sectionnelles $K'(\pi)$ et $K(\pi)$ sont reliées par la formule*

$$K'(\pi) = e^{-2f}(K(\pi) + \Delta_\pi f - |\nabla_{\pi^\perp} f|^2)$$

où $\Delta_\pi f$ est l'opposé de la trace de la hessienne $\nabla^2 f$ restreinte à π et $\nabla_{\pi^\perp} f$ la projection du gradient de f sur l'orthogonal de π.

3 Espaces à courbure sectionnelle constante

3.1 Liste d'espaces modèles

Pour chaque réel κ, et en chaque dimension $n \geq 2$, on définit une variété riemannienne M^κ.

- Si $\kappa > 0$, M^κ est la sphère de rayon $\kappa^{-1/2}$ dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^{n+1}$.
- Si $\kappa = 0$, M^0 est l'espace euclidien de dimension n.
- Si $\kappa < 0$, M^κ est la pseudosphère de rayon $\sqrt{-1}(-\kappa)^{-1/2}$ dans l'espace $\mathbf{R}^{n,1}$, i.e. $M^\kappa = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \,|\, x_1^2 + \cdots x_n^2 - x_{n+1}^2 = 1/\kappa,\, x_{n+1} > 0\}$.

Proposition 3.1 *L'espace M^κ est complet, il a une courbure sectionnelle constante égale à κ. En coordonnées polaires d'origine quelconque, la métrique de M^κ s'écrit*

$$dr^2 + s_\kappa(r)^2 g_1$$

où g_1 est la métrique canonique de la sphère de rayon 1 dans $\mathbf{R}^n$, et s_κ est la solution de l'équation différentielle $y'' + \kappa y = 0$ de conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, soit

$$s_\kappa(r) = \frac{\sin(\sqrt{\kappa} r)}{\sqrt{\kappa}}$$

si $\kappa > 0$,

$$s_0(r) = r$$

si $\kappa = 0$,

$$s_\kappa(r) = \frac{\sinh(\sqrt{-\kappa} r)}{\sqrt{-\kappa}}$$

si $\kappa < 0$.

Preuve. Pour $\kappa = 0$, il n'y a rien à faire. On suppose donc $\kappa \neq 0$.

Le groupe orthogonal de $\mathbf{R}^{n+1}$ (resp. le sous-groupe de $\mathbf{R}^{n,1}$) préserve les sphères. Il agit donc par isométries sur M^κ. Le théorème de Witt (un théorème d'algèbre élémentaire sur les formes quadratiques) affirme que toute isométrie linéaire entre deux sous-espaces d'un espace quadratique se prolonge en une isométrie. Il en résulte que le groupe des isométries agit transitivement sur chaque sphère.

Soient P, $P' \in M^\kappa$. Un 2-plan π tangent à la sphère en P, c'est un 2-plan de $\mathbf{R}^{n+1}$ (resp. de $\mathbf{R}^{n,1}$) orthogonal à P. Si $\kappa > 0$, $\mathbf{R}P \oplus \pi$ et $\mathbf{R}P' \oplus \pi'$ sont de même signature $(3, 0)$, donc sont isométriques. De même, si $\kappa < 0$, $\mathbf{R}P \oplus \pi$ et $\mathbf{R}P' \oplus \pi'$ sont de même signature $(2, 1)$, donc sont isométriques. L'unique isométrie $\mathbf{R}P \to \mathbf{R}P'$ se prolonge en une isométrie $\mathbf{R}P \oplus \pi \to \mathbf{R}P' \oplus \pi'$, qui se prolonge à son tour en une isométrie de $\mathbf{R}^{n+1}$ (resp. de $\mathbf{R}^{n,1}$). Cela donne une isométrie de M^κ qui envoie P sur P' et π sur π'.

Comme la courbure sectionnelle est invariante par isométries, elle est nécessairement constante.

Il reste à calculer la valeur de cette courbure sectionnelle. Pour cela, on remarque que l'intersection d'une sphère avec un 2-plan vectoriel Π, paramètrée par son abscisse curviligne, est une géodésique de la sphère. En effet, son accélération est dans Π et orthogonale à la vitesse, donc orthogonale à la sphère. Etant donné un point P et un 2-plan tangent $\pi \subset T_P M^\kappa$, la surface géodésique N_π est l'intersection de M^κ avec le 3-plan vectoriel $\mathbf{R}P \oplus \pi$. On est donc ramené au cas où $n = 2$. Les cas où $\kappa = 1$ et $\kappa = -1$ ont été traités en exercices 4 et 7. Le cas général s'en déduit, car M^κ est homothétique à M^1 (resp. M^{-1}) suivant que $\kappa > 0$ (resp. $\kappa < 0$).

On calcule directement la métrique $\exp_N^* g_{M^\kappa}$ où $N = (0, \ldots, 0, 1)$. Notons S^{n-1} la sphère unité de $\mathbf{R}^n$ vu comme l'espace tangent à la sphère en N. Si $\kappa > 0$, on considère l'application

$$\begin{array}{rcl}]0, +\infty[\times S^{n-1} & \to & \mathbf{R}^{n+1}, \\ (r, \theta) & \mapsto & \exp_N(r\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{\kappa}}(\theta \sin\sqrt{\kappa}r, \cos\sqrt{\kappa}r) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^{n+1}. \end{array}$$

Comme $\exp_N$ est définie globalement, M^κ est complète. Sa restriction à la boule $]0, \pi/\sqrt{\kappa}[\times S^{n-1}$ est un difféomorphisme sur la sphère privée des deux pôles N et $S = (0, -1)$, et la métrique induite est

$$\begin{array}{rl} & (d(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\theta \sin\sqrt{\kappa}r) + Nd(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\cos\sqrt{\kappa}r)) \cdot (d(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\theta \sin\sqrt{\kappa}r) + Nd(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\cos\sqrt{\kappa}r)) \\ = & \frac{1}{\kappa}(d(\theta \sin\sqrt{\kappa}r) \cdot d(\theta \sin\sqrt{\kappa}r) + Nd(\cos\sqrt{\kappa}r) \cdot d(\cos\sqrt{\kappa}r)) \\ = & \frac{1}{\kappa}(\sin\sqrt{\kappa}r\, d\theta + \theta\cos\sqrt{\kappa}r\, dr) \cdot (\sin\sqrt{\kappa}r\, d\theta + \theta\cos\sqrt{\kappa}r\, dr) + \sin^2\sqrt{\kappa}r\, dr^2 \\ = & \frac{1}{\kappa}\sin^2\sqrt{\kappa}r\, d\theta \cdot d\theta + \cos^2\sqrt{\kappa}r\, dr^2 + \sin^2\sqrt{\kappa}r\, dr^2 \\ = & dr^2 + \frac{1}{\kappa} sin^2\sqrt{\kappa}r\, d\theta^2 \end{array}$$

car $\theta \cdot d\theta = 0$.

Si $\kappa < 0$, on considère l'application

$$\begin{array}{rcl}]0, +\infty[\times S^{n-1} & \to & \mathbf{R}^{n,1}, \\ (r, \theta) & \mapsto & \exp_N(r\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{-\kappa}}(\theta \sinh\sqrt{-\kappa}r, \cosh\sqrt{-\kappa}r) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^{n,1}. \end{array}$$

C'est un difféomorphisme sur la pseudosphère privée du pôle $N = (0, 1)$, et le même calcul donne

$$\begin{array}{rl} & |d(\frac{1}{\sqrt{-\kappa}}\theta \sinh\sqrt{-\kappa}r) + Nd(\frac{1}{\sqrt{-\kappa}}\cosh\sqrt{-\kappa}r)|^2 \\ = & dr^2 + \frac{1}{-\kappa}\sinh^2\sqrt{-\kappa}r\, d\theta^2. \end{array}$$

Dans les deux cas, si $n = 2$, l'exercice 3 donne que la courbure vaut κ. ■

Proposition 3.2 *Si $\kappa > 0$, le groupe des isométries de M^κ est isomorphe au groupe orthogonal $O(n+1)$. Si $\kappa = 0$, $Isom(M^0)$ est le produit semi-direct de $\mathbf{R}^n$ par $O(n)$. Si $\kappa < 0$, $Isom(M^0)$ est isomorphe au sous-groupe $O_0(n,1)$ d'indice 2 dans $O(n,1)$ qui préserve la pseudosphère.*

Preuve. Supposons $\kappa \neq 0$. Soit τ une isométrie de M^κ. Alors $d\tau$ et une isométrie de $T_N M^\kappa$ sur $T_{\tau(N)}M^\kappa$. Le prolongement $\iota = (\tau, d\tau) : \mathbf{R}N \oplus T_N M^\kappa \to \mathbf{R}\tau(N) \oplus T_{\tau(N)}M^\kappa$ est une isométrie de $\mathbf{R}^{n+1}$ (resp. $\mathbf{R}^{n,1}$). Alors $\tau' = \iota^{-1} \circ \tau$ est une isométrie de M^κ fixant N et dont la différentielle en N est l'identité. Par conséquent $\tau'(\exp_N(v)) = \exp_N(v)$ pour tout $v \in T_N M^\kappa$. Comme $\exp_N$ est surjective, τ' est l'identité, donc $\tau = \iota \in O(n+1)$ (resp. $\tau \in O_0(n,1)$). ■

3.2 Caractérisation des variétés modelées sur M^κ

Théorème 3 *Soit M une variété riemannienne. On suppose que sa courbure sectionnelle est une constante κ. Alors pour tout point P de M, la boule $B(P, \mathrm{inj}_P)$ de M est isométrique à une boule de rayon inj_P de l'espace modèle M^κ.*

Preuve. Supposons la courbure sectionnelle constante égale à κ. Soient v et w des vecteurs orthonormés. Montrons que $R_{v,w}w = \kappa v$. Si z est orthogonal à v et à w, alors les vecteurs w et $v(s) = v\cos s + z \sin s$ sont orthonormés, donc

$$(R_{w,v(s)}v(s)) \cdot w = \kappa.$$

En dérivant en $s = 0$, on trouve que

$$(R_{w,v}z) \cdot w + (R_{w,z}v) \cdot w = 0,$$

d'où, par symétrie par rapport aux paires (formule 5) et antisymétrie (formules 2 et 3),

$$(R_{w,v}z) \cdot w = 0.$$

Par antisymétrie (formule 3), on en déduit que $R_{v,w}w$ est orthogonal à tout vecteur orthogonal à v, donc est colinéaire à v. Il vient

$$R_{v,w}w = \kappa v.$$

L'équation de Jacobi s'écrit donc

$$\nabla_T \nabla_T W + \kappa W = 0,$$

et on peut en donner explicitement les solutions : si W est le champ de Jacobi le long de $t \mapsto \exp_P(tv)$ de conditions initiales $W(0) = 0$ et $\nabla_T W(0) = w$, alors $W(t) = s_\kappa(t)Z(t)$ où Z est le transport parallèle de w. En particulier,

$$|W(r)|^2 = s_\kappa(r)^2 |w|^2,$$

donc, sur la boule de rayon inj_P de l'espace tangent $T_P M$,

$$\exp_P{}^* g_M = dr^2 + s_\kappa(r)^2 g_1.$$

Ceci prouve que la boule $B(P, \mathrm{inj}_P)$ est isométrique à toute boule de même rayon de l'espace modèle M^κ. ■

Corollaire 3.3 *Soit M une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle constante égale à κ. Alors le revêtement universel de M est isométrique à l'espace modèle M^κ. Le groupe des transformations de revêtement est un sous-groupe discret du groupe $Isom(M^\kappa)$, isomorphe au groupe fondamental de M. Réciproquement, soit G un sous-groupe discret de $Isom(M^\kappa)$, agissant sans point fixes sur M^κ. Alors l'espace des orbites $G \setminus M^\kappa$ est une variété riemannienne complète à courbure constante égale à κ.*

Preuve. Soit $P \in M$. Comme M est complète, l'application exponentielle $\exp_P$ est définie globalement sur l'espace tangent $T_P M$. Si $\kappa < 0$, notons N l'espace tangent muni de la forme quadratique $\exp_P{}^* g_M$. Si $\kappa > 0$, on se limite à la boule ouverte de rayon $\pi/\sqrt{\kappa}$. Le raisonnement sur les champs de Jacobi de la preuve précédente est vrai globalement, il montre que tant que $\exp_P{}^* g_M$ est définie positive, elle est égale à $dr^2 + s_\kappa(r)^2 g_1$. On conclut que N est riemannienne, globalement isométrique à M^κ (resp. M^κ privée d'un point, si $\kappa > 0$). De plus, $\exp_P$ est un difféomorphisme local en chaque point de N. Par construction, $\exp_P$ est une isométrie locale.

Si $\kappa \leq 0$, M et N sont complètes, donc $\exp_P$ est un revêtement. Comme N est contractile (et *a fortiori* simplement connexe), c'est le revêtement universel de M.

Si $\kappa > 0$, le difféomorphisme local $\Phi : M^\kappa \setminus * \to M$ induit par $\exp_P$ diminue les distances, donc il se prolonge par continuïté en $\Phi : M^\kappa \to M$ qui est encore une isométrie, donc un revêtement. Comme les sphères de dimension ≥ 2 sont simplement connexes, c'est le revêtement universel de M.

Etant donné un revêtement $p : N \to M$, une *transformation de revêtement* est un homéomorphisme $\tau : N \to N$ tel que $p \circ \tau = p$. Si N est muni d'une métrique riemannienne induite $g_N = p^* g_M$, alors $\tau^* g_N = \tau^* p^* g_M = p^* g_M = g_N$ donc τ est une isométrie. Fixons $P \in M$. Soit $\tilde{P} \in p^{-1}(P)$. Alors pour toute tranformation de revêtement τ distincte de l'identité, $d^N(\tilde{P}, \tau(\tilde{P})) \geq 2\mathrm{inj}_P$. En effet, si γ est un segment géodésique minimisant de $\tilde{P}$ à $\tau(\tilde{P})$, $p \circ \gamma$ est un lacet géodésique d'origine P dans M, donc $\mathrm{inj}_P \leq \mathrm{Long}(\gamma)/2$.

Spécialisons au cas où M est à courbure constante, $N = M^\kappa$, P le point de M qui correspond au pôle nord de M^κ, noté $\tilde{P}$. La topologie sur un groupe de matrices de taille $n+1$ peut être définie comme la convergence uniforme sur une partie compacte génératrice de $\mathbf{R}^{n+1}$ quelconque. Une boule de centre $\tilde{P}$ dans la sphère convient. Soit G le groupe des transformations de revêtement. Soit g_j une suite d'élements de G qui converge vers un élément de $Isom(M^\kappa)$. Alors $d^N(g_j\tilde{P}, g_k(\tilde{P}))$ tend vers 0. Par conséquent $g_j = g_k$, i.e. la suite est stationnaire. Cela prouve que G est discret dans $Isom(M^\kappa)$.

Inversement, soit $G \subset Isom(M^\kappa)$ un sous-groupe discret agissant sans point fixe sur M^κ. Montrons que, pour tout $P \in M^\kappa$, $i(P) = \min\{d(P, g(P)) \,|\, g \in G,\, g \neq id\}$ n'est pas nul. Sinon, il existe une suite $g_j \in G \setminus \{id\}$ telle que $d(P, g_j(P))$ tend vers 0. Comme les boules de M^κ sont compactes, d'après le théorème d'Ascoli, il existe une sous-suite qui converge uniformément sur une boule de centre P, donc converge dans la topologie du groupe $Isom(M^\kappa)$ vers un élément $g \in Isom(M^\kappa)$ qui fixe P. Comme G est discret, la suite est stationnaire, donc $g \in G \setminus \{id\}$. Comme G agit sans point fixe, $g = id$, contradiction.

Les applications $p : B(P, i(P)/2) \to G \setminus M^\kappa$ constituent des cartes pour une structure de variété sur le quotient, avec des changements de cartes qui sont des restrictions d'éléments de G. La métrique riemannienne passe au quotient, qui est donc une variété riemannienne à courbure constante égale à κ. L'application exponentielle du quotient est la composition $p \circ \exp$, elle est définie globalement donc le quotient est complet. ∎

Exercice 13 *Montrer que toute isométrie de la 2-sphère préservant l'orientation possède un point fixe. En déduire une classification des surfaces à courbure 1.*

Remarque 3.4 *La classification des surfaces à courbure 0 est plus riche. On trouve une famille à 3 paramètres de métriques sur le tore, et une famille à 2 paramètres de métriques sur la bouteille de Klein.*

La description des surfaces à courbure -1 est extrêmement instructive. Elle fait l'objet du chapitre 5.

4 Théorèmes de comparaison

Il s'agit d'énoncés où on fait l'hypothèse qu'une variété M est plus ou moins courbée que l'espace modèle M^κ, on effectue une même construction dans M et dans M^κ et on conclut qu'une quantité (distance, volume, etc...) est plus grande ou plus petite dans M que dans M^κ.

4.1 Le théorème de comparaison de Rauch

Théorème 4 *Soit M une variété riemannienne, P un point de M. Soit $r < \mathrm{inj}_P$. Soit $B^\kappa(r)$ une boule de rayon r dans M^κ. On suppose que la courbure sectionnelle de M est partout $\leq \kappa$ (resp. $\geq \kappa$). Il existe un unique homéomorphisme $f : B^\kappa(r) \to B^M(P, r)$ qui augmente (resp. diminue) les distances, il s'obtient en composant les applications exponentielles avec une isométrie entre espaces tangents.*

Preuve. Elle va s'étaler jusqu'au paragraphe 4.9. ∎

4.2 Unicité de f

Le point P est l'unique point de $B^M(P, r)$ dont la distance à tout point du bord est $\leq r$ (resp. $\geq r$). Par conséquent, si $f : B^\kappa(r) \to B^M(P, r)$ est un homéomorphisme entre boules riemanniennes qui augmente (resp. diminue) les distances, il envoie centre sur centre. Pour la même raison, il envoie isométriquement segments géodésiques issus du centre sur segments géodésiques issus du centre. Par suite, il envoie sphère centrée au centre de rayon $r' < r$ sur sphère centrée au centre, de même rayon r'. En faisant tendre r' vers 0, on trouve un homéomorphisme f' de la sphère standard qui augmente (resp. diminue) les distances. f' envoie points diamétralement opposés sur points diamétralement opposés. f' envoie un équateur (lieu des points équidistants de deux points diamétralement opposés) sur un équateur, donc une boule sur une boule de même rayon $\pi/2$. On est ramené au problème initial, mais sur une variété de dimension un de moins. En dimension 0, f est évidemment une isométrie. Par récurrence, on conclut que f' est une isométrie, donc f est le difféomorphisme obtenu en composant la réciproque de l'exponentielle de M^κ avec une isométrie entre espaces tangents, puis l'exponentielle de M.

4.3 Réduction à une inéquation différentielle matricielle

Ce paragraphe est destiné à motiver la série de lemmes nécessaires à la preuve du théorème 4.

Comme on compare les variétés M et M^κ au moyen des applications exponentielles, on est amené à comparer les expressions de $\exp_P{}^* g_M$ et de $\exp^* g_\kappa$:

$$K \leq \kappa \Rightarrow \exp_P{}^* g_M \geq \exp^* g_\kappa,$$

$$K \geq \kappa \Rightarrow \exp_P{}^* g_M \leq \exp^* g_\kappa.$$

Comme on l'a vu lors de la preuve du théorème 2, il s'agit de montrer que si W est un champ de Jacobi le long de la géodésique $t \mapsto \gamma(t) = \exp_P(tv)$, tel que $W(0) = 0$ et $\nabla_v W(0) = w$, alors

$$|W(t)| \geq (\text{resp. } \leq)|w| s_\kappa(t),$$

où s_κ est défini dans la proposition 3.1.

Fixons une base orthonormée de l'orthogonal de v dans $T_P M$, et transportons la parallèlement le long de γ. Notons $R(t)$ la matrice dans la base obtenue de l'endomorphisme $z \mapsto R_{z,T}T$ de l'orthogonal de $T = \gamma'(t)$ dans $T_{\gamma(t)}M$. C'est une matrice symétrique (cela résulte de symétrie par paires, formule 5).

Notons $t \mapsto J(t)$ la *résolvante* de l'équation de Jacobi, i.e. la matrice solution de l'équation différentielle matricielle

$$J''(t) + R(t)J(t) = 0$$

telle que $J(0) = 0$ et $J'(0) = I$, la matrice unité. Alors le champ de Jacobi W s'écrit

$$W(t) = J(t)w.$$

On doit donc estimer les valeurs propres de $J(t)^\top J(t)$.

4.4 Analyse de l'équation de Ricatti matricielle

Pour ramener l'équation différentielle du second ordre $J'' + RJ$ à une équation différentielle du premier ordre, on pose

$$U(t) = J'(t)J(t)^{-1}$$

qui satisfait l'*équation de Ricatti*

$$U'(t) + U(t)^2 + R(t) = 0. \tag{24}$$

Lemme 4.1 *La matrice $U(t)$ s'interprète comme la seconde forme fondamentale de la sphère de centre P et de rayon t, pour la normale pointant vers P, au point $\gamma(t)$. Elle est donc symétrique.*

Preuve. Etant donnés des champs de vecteurs V, W sur la sphère unité de T_PM, on note encore V, W leurs prolongements en champs qui, en coordonnées polaires, ne dépendent pas de t. On note $T = \frac{\partial}{\partial r}$ le champ radial. Alors $[T,V] = [T,W] = 0$. Dans le champ de repères parallèle le long de la géodésique γ, le champ V s'écrit $V(t) = J(t)V(0)$. Par conséquent $\nabla_T V = J'(t)V(0)$ et

$$\begin{aligned} U(t)V(t) &= J'(t)J(t)^{-1}V(t) \\ &= J'(t)V(0) \\ &= \nabla_T V \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} UV \cdot W &= (\nabla_T V) \cdot W \\ &= (\nabla_V T) \cdot W) \\ &= \nabla_V (T \cdot W) - (T \cdot \nabla_V W) \\ &= -T \cdot II(V,W), \end{aligned}$$

où II désigne la seconde forme fondamentale de la sphère de rayon t centrée en P. ■

Du développement limité

$$J(t) = tI + o(t^2),$$

on tire

$$U(t) = \frac{1}{t}I + o(1). \tag{25}$$

4.5 Réduction à une inéquation de Ricatti scalaire

Lemme 4.2 *Soit $t \mapsto U(t)$ une matrice symétrique qui satisfait l'équation matricielle*

$$U' + U^2 + R(t) = 0$$

sur $]0,T[$ *et la condition initiale* $U(t)=\frac{1}{t}I+o(1)$*. Notons* $s(t)$ *la plus grande (resp.* $i(t)$ *la plus petite) valeur propre de* $U(t)$*. Alors les fonctions* s *et* i *sont localement lipschitziennes donc dérivables presque partout. On suppose que pour* $t\in]0,T[$,

$$\kappa_- I \leq R(t) \leq \kappa_+ I.$$

Alors pour presque tout $t\in]0,T[$,

$$s'(t)+s(t)^2+\kappa_- \leq 0, \quad i'(t)+i(t)^2+\kappa_+ \geq 0.$$

De plus, au voisinage de 0,

$$s(t)=\frac{1}{t}+o(1), \quad i(t)=\frac{1}{t}+o(1).$$

Preuve. Régularité des fonctions s et i. Quitte à ajouter un multiple de la matrice unité I (ce qui ne fait qu'ajouter une constante à s et à i), on peut supposer U définie positive. Alors $s=\| U \|$ et $i=\| U^{-1} \|^{-1}$ sont des fonctions localement lipschitziennes de U.

Fixons $t\in]0,T[$ où les fonctions s et i sont dérivables. Soit a un vecteur unitaire tel que

$$s(t)=\sup\{U(t)b\cdot b \,|\, |b|=1\}=U(t)a\cdot a.$$

Alors $U(t)^2a\cdot a=s(t)^2$. Pour $\epsilon\geq 0$ petit, $U(t-\epsilon)a\cdot a\leq s(t-\epsilon)$, d'où

$$(U(t-\epsilon)-U(t))a\cdot a\leq s(t-\epsilon)-s(t).$$

En divisant par $-\epsilon$ et en passant à la limite, il vient

$$U'(t)a\cdot a\geq s'(t).$$

De même, si

$$i(t)=\inf\{U(t)b\cdot b \,|\, |b|=1\}=U(t)a'\cdot a',$$

alors $U(t)^2a'\cdot a'=i(t)^2$ et

$$U'(t)a'\cdot a'\leq i'(t).$$

Il vient

$$\begin{aligned} s'(t)+s(t)^2+\kappa_- &\leq U'(t)a\cdot a+U(t)^2a\cdot a+\kappa_- a\cdot a \\ &= (\kappa_- I-R(t))a\cdot a \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

si $R(t)\geq\kappa I$, et

$$\begin{aligned} i'(t)+i(t)^2+\kappa_+ &\geq U'(t)a'\cdot a'+U(t)^2a'\cdot a'+\kappa_+ a'\cdot a' \\ &= (\kappa_+ I-R(t))a'\cdot a' \\ &\geq 0. \blacksquare \end{aligned}$$

4.6 Résolution des inéquations scalaires

Lemme 4.3 *Soit κ un réel. Soit s une fonction localement lipschitzienne sur un intervalle $]0,T[$ telle que, presque partout,*

$$s'(t) + s(t)^2 + \kappa_- \leq 0$$

et $s(t)$ tend vers $+\infty$ en 0. Alors pour tout $t \in]0,T[$,

$$s(t) \leq \cot_{\kappa_-}(t)$$

où $\cot_\kappa(t) = s'_\kappa(t)/s_\kappa(t)$. De même, si en presque tout $t \in]0,T[$,

$$i'(t) + i(t)^2 + \kappa_+ \geq 0$$

et $i(t)$ tend vers $+\infty$ en 0, alors pour tout $t \in]0,T[$ (resp. $t \in]0, \min\{T, \pi/\sqrt{\kappa_+}\}[$ si $\kappa_+ > 0$),

$$i(t) \geq \cot_{\kappa_+}(t).$$

Preuve. La fonction $\cot_\kappa$ est la solution de $y' + y^2 + \kappa = 0$ qui satisfait $y(t) = \frac{1}{t} + o(1)$ au voisinage de 0. Les autres solutions s'obtiennent par translation du temps. Soit $t_0 > 0$. Il existe c tel que $s(t_0) = \cot_{\kappa_-}(t_0 - c)$. Alors, pour $t \in]0, t_0[$, $s(t) \geq \cot_{\kappa_-}(t-c)$, ce qui entraîne que $c \leq 0$. Aussi, pour $t \geq t_0$, $s(t) \leq \cot_{\kappa_-}(t-c) \leq \cot_{\kappa_-}(t)$ car $\cot_{\kappa_-}$ est décroissante. Comme ceci est vrai pour tout t_0, on conclut que pour tout $t > 0$, $s(t) \leq \cot_{\kappa_-}(t)$. Idem avec i. ■

4.7 Encadrement de la résolvante de Jacobi

Lemme 4.4 *Soit $t \mapsto J(t)$, $t \in]0,T[$, une matrice solution de*

$$J'(t) = U(t)J(t),$$

où $U(t)$ est symétrique, et telle que $J(t) = tI + o(t)$ au voisinage de 0. Soient κ_-, κ_+ des réels. Si $\kappa_\pm > 0$, on note $T^\pm = \min\{T, \pi/\sqrt{\kappa_\pm}\}$. On suppose que pour tout $t \in]0, T^-[$,

$$U(t) \leq \cot_{\kappa_-}(t) I.$$

Alors pour tout $t \in]0, T^-[$,

$$J(t)^\top J(t) \leq s^2_{\kappa_-}(t) I.$$

Si, pour tout $t \in]0, T^+[$,

$$U(t) \geq \cot_{\kappa_+}(t) I,$$

alors pour tout $t \in]0, T^+[$,

$$J(t)^\top J(t) \geq s^2_{\kappa_+}(t) I.$$

Preuve. On suppose que $U(t) \leq \cot_\kappa(t) I$. On dérive

$$\begin{aligned}(J^\top J)' &= J'^\top J + J^\top J' \\ &= 2J^\top U J \\ &\leq 2\cot_\kappa(t) J^\top J.\end{aligned}$$

Si $\sigma(t)$ désigne la plus grande valeur propre de $J(t)^\top J(t)$, on en tire, comme dans la preuve du lemme 4.2,

$$\sigma'(t) \leq 2\cot_\kappa(t)\sigma(t).$$

La fonction s_κ^2 est l'unique solution sur $]0, \pi/\sqrt{\kappa}[$ de l'équation différentielle $y' = 2\cot_\kappa(t) y$ telle que $y(t) = t^2 + o(t^2)$ au voisinage de 0. Les autres solutions lui sont proportionnelles. Soit $t_0 \in]0, T^-[$. Il existe c tel que $\sigma(t_0) = c\, s_\kappa(t_0)^2$. Pour $t \leq t_0$, $\sigma(t) \geq c\, s_\kappa(t)^2$, ce qui entraîne que $c \leq 1$. Pour $t \in [t_0, T^-[$, $\sigma(t) \leq c\, s_\kappa(t)^2 \leq s_\kappa(t)^2$. Comme c'est vrai pour t_0 arbitrairement petit, on conclut que $\sigma(t) \leq s_\kappa(t)^2$ pour tout $t \in]0, T^-[$. Le raisonnement est semblable pour la plus petite valeur propre. ■

4.8 Contrôle de la différentielle de l'exponentielle

Proposition 4.5 *Soit M une variété riemannienne, $P \in M$, v un vecteur tangent unitaire en P. Choisissons une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $T_P M$ telle que $e_1 = v$. Transportons la parallèlement le long de la géodésique $t \mapsto \exp_P(tv)$ en une base $(E_1(t), \ldots, E_n(t))$. Notons $J(t)$ la matrice dans les bases $(e_2, \ldots, e_n)$ et $(E_2(t), \ldots, E_n(t))$ de la différentielle en tv de $\exp_P$, restreinte à $v^\perp$, de sorte que*

$$d_{tv} \exp_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J(t) \end{pmatrix}.$$

Soit κ un réel. Notons $T^\kappa = \pi/\sqrt{\kappa}$ si $\kappa > 0$, $T^\kappa = +\infty$ sinon. Notons

$$T = \inf\{t < T^\kappa \mid J(t) \textit{ n'est pas inversible}\}.$$

Notons K la courbure sectionnelle de M. Alors

$$\inf K \geq \kappa \quad \Rightarrow \quad \forall t \in [0, T[,\ J(t)^\top J(t) \leq s_\kappa(t)^2 I,$$

$$\sup K \leq \kappa \quad \Rightarrow \quad \forall t \in [0, T[,\ J(t)^\top J(t) \geq s_\kappa(t)^2 I.$$

Preuve. Supposons la courbure sectionnelle $\geq \kappa$ sur M. Alors le long de toute géodésique, la matrice symétrique $R(t)$ satisfait $R(t) \geq \kappa I$. On pose $U(t) = J'(t) J(t)^{-1}$, qui est bien définie sur $]0, T[$. D'après les lemmes 4.2 et 4.3, $U(t) \leq \cot_\kappa(t) I$. D'après le lemme 4.4, $J(t)^\top J(t) \leq s_\kappa(t)^2 I$. L'argument est le même lorsqu'une borne supérieure sur la courbure sectionnelle est donnée. ■

4.9 Preuve du théorème 4

Supposons que $\inf_M K \geq \kappa$. Soit $P \in M$, $v \in T_P M$ unitaire. D'après la proposition 4.5, si $w \in T_P M$ est orthogonal à v,

$$\begin{aligned} |d_{tv} \exp_P(w)|^2 &= (J(t)^\top J(t))w \cdot w \\ &\leq s_\kappa(t)^2 |w|^2 \end{aligned}$$

tant que $J(t)$ reste inversible et

$$t < T^\kappa := \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \text{ si } \kappa > 0, \quad = +\infty \text{ sinon.}$$

Autrement dit, posons

$$\rho = \sup\{r < T^\kappa \,|\, d\exp_P \text{ est inversible sur la boule de rayon } r\}.$$

Alors, en coordonnées polaires d'origine P, la métrique de M s'écrit $dr^2 + g_r$ avec

$$g_r \leq s_\kappa(r)^2 g_{can},$$

où g_{can} est la métrique canonique sur la sphère unité tangente en P.

Fixons un point P^κ de M^κ et choisissons une isométrie $\iota : T_{P^\kappa} M^\kappa \to T_P M$. Alors

$$\iota : (T_{P^\kappa} M^\kappa, {\exp_{P^\kappa}}^* g_\kappa) \to (T_P M, {\exp_P}^* g_M)$$

diminue les longueurs sur la boule de rayon ρ. Le rayon d'injectivité de M^κ est égal à T^κ. L'application exponentielle de M^κ possède donc une réciproque définie sur la boule ouverte de centre P^κ et de rayon ρ. On conclut que l'application

$$f = \exp_P \circ \iota \circ (\exp_{P^\kappa})^{-1} : B^\kappa(P^\kappa, \rho) \to M$$

diminue les longueurs, et par conséquent aussi les distances. Remarquer que $\rho \geq \mathrm{inj}_P$.

Si la courbure sectionnelle est $\leq \kappa$ sur M, on trouve que

$$g_r \geq s_\kappa(r)^2 g_{can},$$

pour $r < \rho$, et donc que f augmente les longueurs. La restriction de f à la boule de centre P^κ et de rayon égal au rayon d'injectivité de M en P, qui est un difféomorphisme, augmente donc les distances intrinsèques sur les boules. ∎

4.10 Points conjugués

Définition 4.6 *Soit M une variété riemannienne. Soit γ un segment géodésique d'extrémités P et Q dans M. On dit que Q est conjugué à P le long de γ s'il existe un champ de Jacobi non nul le long de γ qui s'annule à la fois en P et en Q.*

Proposition 4.7 *Soit M une variété riemannienne, $P \in M$, $v \in T_PM$. Notons γ la géodésique $s \mapsto \exp_P(sv)$, $s \in [0,t]$. L'application exponentielle $\exp_P$ est un difféomorphisme local en tv si et seulement si $Q = \exp_P(tv)$ n'est pas conjugué à P le long de γ.*

Preuve. Tout champ de Jacobi orthogonal à γ et s'annulant en P est de la forme $W(s) = J(s)w$ et alors $d_{tv}\exp_P(w) = W(t)$. Par conséquent $J(t)$ n'est pas bijective si et seulement si l'un de ces champs W s'annule aussi en t. ∎

Théorème 5 Théorème de Cartan-Hadamard. *Soit M une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle négative ou nulle. Alors M ne possède aucune paire de points conjugués. Si de plus M est simplement connexe, alors par deux points distincts passe une unique géodésique, qui dépend de façon C^∞ de ses extrémités.*

Preuve. On utilise les notations de la proposition 4.5. Soit T la borne inférieure des $t > 0$ tels que $J(t)$ ne soit pas inversible. Supposons $T < \infty$. D'après la proposition 4.5, si $\sup K \leq 0$, alors pour tout $t < T$,

$$J(t)^\top J(t) \geq t^2 I.$$

En particulier, $J(t)^\top J(t) \geq t^2 I$ pour $t = T$ et donc $J(t)$ est inversible pour tout t voisin de T, ce qui contredit la définition de T. On conclut que $J(t)$ est inversible pour tout $t > 0$, le long de toute géodésique, donc il n'y a pas de points conjugués.

D'après la proposition 4.7, pour tout P, l'application $\exp_P$ est un difféomorphisme local. Notons N l'espace tangent T_PM muni de la métrique ${\exp_P}^* g_M$. C'est une variété riemannienne complète, car son exponentielle à l'origine est l'identité, donc définie partout. Par construction, $\exp_P : N \to M$ est une isométrie locale entre variétés complètes, donc un revêtement. Si M est simplement connexe, c'est un difféomorphisme. D'où l'unicité de la géodésique passant par P et un autre point Q.

Soit $f : TM \to M \times M$ l'application définie par $f(P, v) = (P, \exp_P(v))$. Alors $df = (id, d\exp_P)$ est bijective en chaque point. Comme f est bijective, f est un difféomorphisme. Son application réciproque, restreinte au complémentaire de la diagonale, associe à deux points distincts la géodésique qui les joint. Elle est de classe C^∞. ∎

Corollaire 4.8 *Soit M une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle négative ou nulle. Alors le groupe fondamental de M est infini.*

Preuve. En effet, le revêtement universel de M, difféomorphe à un espace tangent, est non compact. ∎

4.11 Formule de la variation seconde

Il s'agit de calculer la dérivée seconde de la longueur d'une famille de courbes.

Proposition 4.9 *Soit $s \mapsto \gamma_s$ une famille de courbes, telle que γ_0 soit une géodésique paramétrée à vitesse 1 sur $[0, L]$. Notons $T = \gamma'_0$, $V = \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}_{|s=0}$. Alors*

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\mathrm{Long}(\gamma_s)_{|s=0} &= -(T \cdot \nabla_V V)(L) + (T \cdot \nabla_V V)(0) && (26)\\
&\quad + \int_0^L (|\nabla_T V|^2 - ((\nabla_T V) \cdot T)^2 - (R_{V,T}T) \cdot V)\, dt. && (27)\\
&= (V \cdot \nabla_T V - T \cdot \nabla_V V)(L) && (28)\\
&\quad -(V \cdot \nabla_T V - T \cdot \nabla_V V)(0) && (29)\\
&\quad - \int_0^L ((\nabla_T \nabla_T V + R_{V,T}T) \cdot V + ((\nabla_T V) \cdot T)^2)\, dt. && (30)
\end{aligned}
$$

Preuve.

Comme $\mathrm{Long}(\gamma_s) = \int_0^L |T|^2\, dt$, il faut dériver deux fois $|T|$ par rapport à s, i.e. dans la direction de V. On utilisera l'identité $\nabla_V T = \nabla_T V$.

$$
\begin{aligned}
\nabla_V |T| &= |T|^{-1}(\nabla_V T) \cdot T\\
&= |T|^{-1}(\nabla_T V) \cdot T,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_V \nabla_V |T| &= (\nabla_V(|T|^{-1}))(\nabla_V T) \cdot T + |T|^{-1}\nabla_V((\nabla_T V) \cdot T)\\
&= (-|T|^{-3}(\nabla_V T) \cdot T)(\nabla_V T) \cdot T\\
&\quad + |T|^{-1}((\nabla_V \nabla_T V) \cdot T + (\nabla_T V) \cdot \nabla_V T).
\end{aligned}
$$

En $s = 0$, $|T| = 1$ d'où

$$\nabla_V \nabla_V |T| = -((\nabla_T V) \cdot T)^2 + (\nabla_V \nabla_T V) \cdot T + |\nabla_T V|^2.$$

Or, par définition de la courbure,

$$
\begin{aligned}
(\nabla_V \nabla_T V) \cdot T &= (R_{V,T}V) \cdot T - (\nabla_T \nabla_V V) \cdot T\\
&= -(R_{V,T}T) \cdot V - \nabla_T((\nabla_V V) \cdot T) + (\nabla_V V) \cdot (\nabla_T T)\\
&= -(R_{V,T}T) \cdot V - \nabla_T((\nabla_V V) \cdot T),
\end{aligned}
$$

car γ_0 est une géodésique. Il vient

$$\nabla_V \nabla_V |T| = |\nabla_T V|^2 - ((\nabla_T V) \cdot T)^2 - (R_{V,T}T) \cdot V - \nabla_T((\nabla_V V) \cdot T).$$

On intégrant, on trouve

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\mathrm{Long}(\gamma_s)_{|s=0} &= -((\nabla_V V) \cdot T)(L) + ((\nabla_V V) \cdot T)(0)\\
&\quad + \int_0^L (|\nabla_T V|^2 - ((\nabla_T V) \cdot T)^2 - (R_{V,T}T) \cdot V)\, dt.
\end{aligned}
$$

En dérivant

$$\nabla_T(\nabla_T V \cdot V) = (\nabla_T \nabla_T V) \cdot V + |\nabla_T V|^2,$$

on effectue l'intégration par parties qui conduit à la seconde formule. ■

Lemme 4.10 *Soit M une variété riemannienne, γ un segment géodésique minimisant d'extrémités P et Q. Alors aucun point intérieur de γ n'est conjugué à P le long de γ.*

Preuve. Par l'absurde. Soit $P' = \gamma(\ell)$, $\ell < L = \mathrm{Long}(\gamma)$ un point conjugué à P le long de γ. Soit W un champ de Jacobi non nul qui s'annule en P et en P'. Fixons $\epsilon < \mathrm{inj}_{P'}/2$. Pour s petit, on définit une famille de courbes γ_s paramétrées par $[0, \ell + \epsilon]$ comme suit. Pour $t \in [0, \ell - \epsilon]$,

$$\gamma_s(t) = \exp_{\gamma(t)}(sW(t)).$$

Pour $t \in [\ell-\epsilon, \ell+\epsilon]$, $\gamma_s(t)$ est l'unique géodésique minimisante de $\gamma_s(\ell-\epsilon)$ à $\gamma_0(\ell+\epsilon)$.

D'après la formule de la variation première,

$$\frac{d\mathrm{Long}(\gamma_s)}{ds}_{|s=0} = 0.$$

Notons W la variation de la famille γ_s sur $[0, \ell-\epsilon]$, et V sa variation sur $[\ell-\epsilon, \ell+\epsilon]$. Ces champs sont nuls aux extrémités $t = 0$ et $t = \ell + \epsilon$, géodésiques en $t = \ell - \epsilon$, donc $W = \nabla_W W = 0$ en $t = 0$, $\nabla_W W = \nabla_V V = 0$ en $t = \ell - \epsilon$, $V = \nabla_V V = 0$ en $t = \ell + \epsilon$. En $s = 0$, W et V sont orthogonaux à T et satisfont l'équation de Jacobi. Les fonctions $(\nabla_T W) \cdot T$ et $(\nabla_T V) \cdot T$, dérivées des fonctions $W \cdot T = 0$ et $V \cdot T = 0$, sont nulles.

D'après la formule de la variation seconde,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\mathrm{Long}(\gamma_s([0, \ell - \epsilon]))_{|s=0} &= (W \cdot \nabla_T W - (\nabla_W W) \cdot T)(\ell - \epsilon) \\
&\quad -(W \cdot \nabla_T W - (\nabla_W W) \cdot T)(0) \\
&\quad - \int_0^{\ell-\epsilon} ((\nabla_T \nabla_T W + R_{W,T}T) \cdot W + ((\nabla_T W) \cdot T)^2)\, dt \\
&= (W \cdot \nabla_T W)(\ell - \epsilon).
\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathrm{Long}(\gamma_s([\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]))_{|s=0} = -(V \cdot \nabla_T V)(\ell - \epsilon)$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\mathrm{Long}(\gamma_s)_{|s=0} &= (W \cdot \nabla_T W - V \cdot \nabla_T V)(\ell - \epsilon) \\
&= W(\ell - \epsilon) \cdot (\nabla_T W - \nabla_T V)(\ell - \epsilon)).
\end{aligned}$$

Comme $\gamma_{s|[\ell-\epsilon,\ell+\epsilon]}$ est une famille de géodésiques issues de $Q' = \gamma_0(\ell+\epsilon)$, on peut écrire $V(\ell-\epsilon) = J(2\epsilon)v$ où $v \in T_{Q'}M$, d'où

$$\nabla_{-T}V(\ell-\epsilon) = J'(2\epsilon)v = U(2\epsilon)V(\ell-\epsilon)$$

où U est la seconde forme fondamentale des sphères centrées en Q', orientées par T. Par conséquent

$$(\nabla_{-T}V)(\ell-\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon}(V(\ell-\epsilon) + o(\epsilon)).$$

lorsque ϵ tend vers 0.

Comme $W(\ell) = 0$,

$$W(\ell-\epsilon) = -\epsilon\nabla_T W(\ell-\epsilon) + o(\epsilon).$$

Enfin, $V(\ell-\epsilon) = W(\ell-\epsilon)$, donc, notant $w = (\nabla_T W)(\ell-\epsilon)$,

$$-(\nabla_T V)(\ell-\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon}(-\epsilon w + o(\epsilon)).$$

Il vient

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}\mathrm{Long}(\gamma_s)_{|s=0} &= -\epsilon w \cdot (w - \frac{1}{2}w) + o(\epsilon) \\ &\sim -\epsilon |w|^2 < 0 \end{aligned}$$

car, comme W est solution non nulle d'une équation différentielle du second ordre, et $W(\ell) = 0$, nécessairement $\lim_{\epsilon\to 0} w = (\nabla_T W)(\ell) \neq 0$. En choisissant $\epsilon > 0$ assez petit, on trouve donc des chemins de P à Q' de longueur $< \ell + \epsilon$. Cela prouve que γ n'est pas minimisante entre P et Q', et *a fortiori* entre P et Q. ■

Théorème 6 O. Bonnet. *Soit $\kappa > 0$. Soit M une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle $\geq \kappa$. Alors M est compacte, de diamètre au plus $\pi/\sqrt{\kappa}$, et son groupe fondamental est fini.*

Preuve. Soient P et Q deux points de M, soit γ une géodésique minimisante de P à Q. On reprend les notations de la proposition 4.5. Si $\inf K \geq \kappa > 0$, alors tant que $t < \pi/\sqrt{\kappa}$ et $J(t)$ est inversible,

$$J(t)^T J(t) \leq \frac{\sin^2(\sqrt{\kappa}t)}{\kappa} I.$$

Comme $\sin(\sqrt{\kappa}t)$ s'annule en $t = \pi/\sqrt{\kappa}$, nécessairement il existe $\ell \leq \pi/\sqrt{\kappa}$ tel que $J(\ell)$ ne soit pas inversible. Autrement dit, il existe un point conjugué à P sur γ, à distance au plus $\pi/\sqrt{\kappa}$ de P. D'après le lemme 4.10, cela entraîne que $d(P,Q) \leq \pi/\sqrt{\kappa}$. On conclut que le diamètre de M est au plus égal à $\pi/\sqrt{\kappa}$, donc que M est compacte.

Le résultat s'applique aussi au revêtement universel de M : celui-ci est compact, donc le groupe fondamental de M est fini. ■

Remarque 4.11 *Le théorème de Bonnet est vrai sous une hypothèse plus faible, faisant intervenir seulement la* courbure de Ricci. *Sous cette forme, il est dû à S. B. Myers.*

Pour d'autres théorèmes de comparaison, voir le livre de J. Cheeger et D. Ebin.