USJ Faculté des Sciences **Géométrie différentielle** **Prof J.SAAB**

Td -5-

---

1. Montrer que si $\bigtriangledown$ est une connexion linéaire sur une variété M alors pour tout tenseur $L \in \otimes_2^1 M$, le tenseur $\overline{\bigtriangledown}$ donné par
$$\overline{\bigtriangledown}_X Y = \bigtriangledown_X Y + L(X,Y)$$
est aussi une connexion sur M.
Si on fait un changement de coordonnées autour de p, càd x^i et $x^{'i}$ sont deux coordonnées locales autour de p liées par $\frac{\partial}{\partial x^{'i}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{'i}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$.Trouver une relation entre Γ_{ij}^k et $\Gamma_{ij}^{\prime k}$

---

2. Soit $\bigtriangledown$ une connexion sur M . Montrer que le tenseur $\tilde{\bigtriangledown}$ donné par
$$\tilde{\bigtriangledown}_X Y = \frac{1}{2}(\bigtriangledown_X Y + \bigtriangledown_Y X)$$
est une connexion à torsion nulle.

---

3. On donne une connexion linéaire $\bigtriangledown$ sur M et on définit le conjugué de $\bigtriangledown$ par
$$\hat{\bigtriangledown}_X Y = \bigtriangledown_Y X + [X,Y]$$
   (a) Montrer que $\hat{\bigtriangledown}$ est une connexion sur M
   (b) Calculer les coèfficients $\hat{\Gamma}_{ij}^k$ de $\hat{\bigtriangledown}$ en fonction de celles de $\bigtriangledown$

---

4. On donne une connexion linéaire $\bigtriangledown$ sur M et soit $\overline{\bigtriangledown} = \frac{1}{2}(\bigtriangledown + \hat{\bigtriangledown})$. Montrer que
   (a) $\overline{\bigtriangledown}$ est une connexion à torsion nulle
   (b) si $T_{\bigtriangledown} = 0$ alors $\bigtriangledown = \overline{\bigtriangledown} = \hat{\bigtriangledown}$

---

5. On vous rappelle les défintions suivantes, pour toute $\omega \in \wedge^k M \quad k \geq 0$ et pour tout $X \in \chi(M)$ on peut parler de $\bigtriangledown_X \omega$ avec $\bigtriangledown$ une connexion linéaire sur M :
$\star$ si $\omega \in \wedge^k M$ alors $\bigtriangledown_X \omega \in \wedge^k M$ définie de la façon suivante:
1-$\bigtriangledown_X f := X(f) \quad \forall f \in C^\infty(M)$
2-$(\bigtriangledown_X \omega)(Y) = \bigtriangledown_X \omega(Y) - \omega(\bigtriangledown_X Y)$
3-$(\bigtriangledown_X \omega)(Y,Z) = \bigtriangledown_X \omega(Y,Z) - \omega(\bigtriangledown_X Y.Z) - \omega(Y, \bigtriangledown_X Z)$ ....
   (a) Montrer que pour tout $\omega \in \wedge^1 M$ et pour tous $X, Y \in \chi(M)$ on a $d\omega(X,Y) = (\bigtriangledown_X \omega)(Y) - (\bigtriangledown_Y \omega)(X)$
   (b) Montrer que pour tout $\omega \in \wedge^2 M$ et pour tous $X, Y, Z \in \chi(M)$ on a:
$$d\omega(X,Y,Z) = (\bigtriangledown_X \omega)(Y,Z) + (\bigtriangledown_Y \omega)(Z,X) + (\bigtriangledown_Z \omega)(X,Y)$$

---

6. Soient M et N deux variétés munies respectivement de deux connexions linéaires D et $D^{'}$.On dit qu'une C^∞ application $f : M \to N$ preserve les connexions si $f_*(\bigtriangledown_X Y)_p = (\bigtriangledown^{'}_{X^{'}} Y^{'})$ où $X^{'} = f_*(X)$, $Y^{'} = f_*(Y)$. Montrer que dans un tel cas on a:
$$f_* R(X,Y)Z = R^{'}(X^{'}, Y^{'})Z^{'} \text{ et } f_*(T(X,Y) = T^{'}(X^{'}, Y^{'})$$

---

7. On dit qu'une variété M est parallèlisable si $\chi(M)$ admet une base globale. Montrer qu'une variété M est parallèlisable si et seulement si il existe une connxion linéaire sur M pour laquelle le transport parallèle ne dépend pas des courbes. (Une telle connexion est dite plate)

   Montrer que si $\bigtriangledown$ est une connexion plate alors sa courbure est nulle.
