USJ Faculté des Sciences **Géométrie différentielle** **Prof J.SAAB**

Td -4-

---

1. On considère la variété $M = \mathbb{R}^2$. $\omega \in \wedge^1 M$, $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ une 1-forme différentielle; $X \in \chi(M)$, $X = A(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ un champ de vecteurs sur M. Calculer $d\omega$, $i_X\omega$, $L_X\omega$.

2. Soit $\omega = ydx + xdy$ une 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$.Calculer $d\omega$. Déterminer $X \in \chi(\mathbb{R}^2)$ tel que $L_X\omega = 0$.

---

3. Soit $M = \mathbb{R}^3$.Déterminer $d\omega \quad \forall \omega \in \wedge^i M, \quad i = 0, 1.2...$

---

4. Si $M = \mathbb{R}^4, \omega = (2x+1)ydx + (y^2 - z)dy + xzdz + dt \in \wedge^1 M$. Trouver $d\omega$

   (a) Soit $\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \in \wedge^1\mathbb{R}^3$. Trouver ${}_{i_X}\omega$. En particulier trouver $i_X\omega$ si $\omega = 2xzdx - xz^2dy + e^{yz}dz$ et $X = (2x-y)\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial z}$

   (b) On considère le champ $X = 2x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + (y-z)\frac{\partial}{\partial z}$ et la forme différentielle $\omega = x^2zdx \wedge dy \in \Lambda^2\mathbb{R}^3$. Trouver $i_X\omega$

5. Soit $\omega = (x^2+1)dx \wedge dy - yzdz \wedge dx \in \Lambda^2\mathbb{R}^3$ et soit $X = X^1\frac{\partial}{\partial x} + X^2\frac{\partial}{\partial y} + X^3\frac{\partial}{\partial z}$. Trouver $L_X\omega$

6. Soient (a^{ij}) les composantes d'un tenseur symétrique $(2,0)$ et (b_{ij}) celles d'un tenseur antisymétrique $(0,2)$. Calculer la somme $a^{ij}b_{ij}$

7. Soient (a^i_j) les composantes d'un tenseur $(1,1)$ Montrer que

   (a) Si (a^i_j) vérifient $a^i_k a^k_j = \delta^i_j$ alors $\det(a^i_j) = \pm 1$

   (b) Si $\det(a^i_j) = -1$ alors $\det(a^i_j + \delta^i_j) = 0$

   (c) Si $\det(a^i_j) = 1$ et si (a^i_j) est d'ordre impaire alors $\det(a^i_j - \delta^i_j) = 0$

8. Soit E un e.v , $\{e_i\}$ une base de E et soit $\{\omega_i\}$ la base duale de $\{e_i\}$. Soit $\alpha \in \otimes^2_0 E$. Montrer que

   (a) $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, e_j)\omega_i \otimes \omega_j$

   (b) Si $\{u_i\}$ est une autre base de E telle que $u_j = c^i_j e_i$ et $\alpha(u_i, u_j) = b_{ij}$ Trouver b_{ij} en fonction de a_{kl}

9. Soit E un e.v. de dimension $n, \theta \in \Lambda E^*$ est dite homogène de dégré k si $\theta \in \Lambda^k E$. Un élément homogène de dégrv k est dit dvcomposable si et seulement si : il existe k éléments $\theta^1 \cdots \theta^k \in \Lambda^1 E$ tels que $\theta = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k$

   (a) Montre que si $\theta \in \Lambda^k E$ est décomposable alors $\theta \wedge \theta = 0$

   (b) Si $\dim E > 3$, $\theta^1, \cdots, \theta^k$ sont lin-ind; $\theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4$ est-elle décomposable?

   (c) Si $\dim E \leq 3$, montrer que tout élément homogène de dégré $k \geq 1$ est décomposable

   (d) Si $\dim E = 4$. Trouver dans $\Lambda^2 E$ un exemple d'un élément homogène non décomposable.

10. Soient $A, B \in \otimes^1_1 M$. Pour tous $X, Y \in \chi(M)$ on définit

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= [AX, BY] + [BX, AY] + AB[X,Y] + BA[X,Y] \\ &\quad -A[X, BY] - A[BX, Y] - B[X, AY] - B[AX, Y] \end{aligned}$$

   (a) Montrer que S est un tenseur $(2,1)$ antisymétrique

   (b) Soit $J \in \otimes^1_1 M$; on définit

$$N(X,Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] + J^2[X,Y]$$

   Montrer que N est un tenseur $(2,1)$ et trouver la relation lie les coefficients de N à ceux de J.