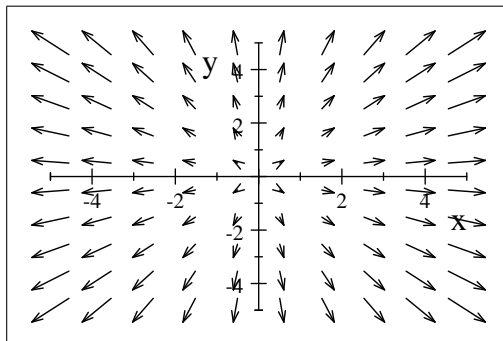


1. Soit $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^2 . Trouver le groupe à un paramètre ainsi que le flot associés à X . Donner une représentation géométrique.



2. Soit $X = e^{-x} \frac{\partial}{\partial x}$ un champ de vecteur sur \mathbb{R}^2 . Donner le groupe à un paramètre associé à X . Ce groupe est-il global?

3. Trouver une expression générale du champ $X \in \chi(\mathbb{R}^2)$ dans chacun des cas suivants:

(a) $[\frac{\partial}{\partial x}, X] = X$ et $[\frac{\partial}{\partial y}, X] = X$

(b) $[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, X]$

4. On considère la sphère S^2 munie des coordonnées sphériques $(\varphi; \theta)$ avec $\varphi = (\vec{Oz}, \vec{OM})$ et $\theta = (\vec{OM}, \vec{OM'})$ où $M \in S^2$ et M' est la projection de M sur (xOy) parallèlement à (Oz) .

Soit $X = \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi}$ un champ de vecteurs sur S^2

- (a) Trouver la courbe intégrale de X ; $\gamma(t) = (\theta(t); \varphi(t))$ On donne $\int \frac{dt}{\sin(t+a)} = \ln |\tan(\frac{t+a}{2})| + b$; $a, b = cte$.
- (b) X est-il complet?

5. Soient $X = \frac{\partial}{\partial x}$; $Y = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ deux champs de vecteurs sur \mathbb{R}^2 ; \mathbb{R}^2 étant muni des coordonnées $(x; y)$

Soient $\varphi_{(x;y)}(t)$ et $\psi_{(x;y)}(s)$ les flots associés à X et Y , avec $\varphi_{(x;y)}(0) = (x; y)$ et $\psi_{(x;y)}(0) = (x; y)$

- (a) On dit que X et Y commutent si $\psi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \psi_s, \forall s, t$. Est-ce que X et Y commutent?
- (b) On rappelle la relation entre le crochet et les flots:

$$[X; Y]_{(x;y)} = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} (\psi_s \circ \varphi_t - \varphi_t \circ \psi_s)_{\substack{s=0 \\ t=0}}$$

Calculer de deux façons le crochet $[X; Y]_{(x;y)}$ et déduire un résultat sur le crochet quand deux champs commutent

- (c) Soit $C_t(x; y) = \varphi_{-t} \circ \psi_{-t} \circ \varphi_t \circ \psi_t(x; y)$. Calculer $C_0(x; y)$; $C'_0(x; y)$; $C''_0(x; y)$ et déduire que $C''_0(x; y) = -2[X; Y]_{(x;y)}$

6. On se donne sur \mathbb{R}^2 les champs de vecteurs:

$$\begin{aligned} X &= \sin(xy) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \\ Y &= x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

on se donne aussi la fonction $f(x, y) = e^{xy}$ et les formes différentielles

$$\alpha = 2ydx - 3dy; \quad \beta = dx - 2xdy$$

Calculer:

- $[X, Y]$
- $[X, Y](f)(p)$ où $p = (0, 0)$
- $f_*X, f_*Y, f_*[X, Y]$ et justifier que $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$
- $\alpha \wedge \beta$ et puis $\alpha \wedge \beta(X, Y)$
- $i_X\alpha, i_X\beta, i_X(\alpha \wedge \beta), d\alpha(X, Y)$
- $(\nabla_X\alpha)(Y)$ où ∇ est une connexion linéaire sur \mathbb{R}^2 donnée par: $\Gamma_{ij}^k = 0$ sauf $\Gamma_{11}^1 = x, \Gamma_{12}^2 = y$.

7. L'objectif de ce problème est d'établir un rapport entre les flots de plusieurs champs de vecteurs. Les relations suivantes sont vraies pour tous champs X et Y :

Si $\varphi_t, \psi_t, \zeta_t$ sont les flots des champs $X, Y,$ et $[X, Y]$ respectivement, et si on définit pour tout $p \in M$

$$((\varphi_t)_* Y)_p := (\varphi_t)_{*(\varphi_{-t}(p))} Y_{(\varphi_{-t}(p))}$$

On a toujours:

- $((\varphi_t)_* Y)_p = \frac{d}{ds} (\varphi_t \circ \psi_s \circ \varphi_{-t})(p)_{s=0}$
- $[X, Y] = -\frac{d}{dt} ((\varphi_t)_* Y)_{t=0}$
- $(\zeta_t)_*[X, Y]_{t=0} = [(\varphi_t)_*X, (\psi_t)_*Y]_{t=0}$

On propose d'établir ces relations sur un exemple particulier:

M désigne la variété \mathbb{R}^2 , $p = (x; y)$ un point de \mathbb{R}^2 et soient les champs:

$$\begin{aligned} X &= xy \frac{\partial}{\partial x} - 2 \frac{\partial}{\partial y} \\ Y &= x \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

- Trouver le crochet $[X, Y]$ ainsi que les flots $\varphi_t(x; y), \psi_t(x; y), \zeta_t(x; y)$ de $X, Y, [X, Y]$ respectivement, pour tout point $(x; y)$ de \mathbb{R}^2
- Y -a-t- il au moins un champs complet parmi $X, Y,$ et $[X, Y]$?
- Trouver les applications sur $\chi(\mathbb{R}^2)$, $(\varphi_t)_*, (\psi_t)_*$ et $(\zeta_t)_*$
- Calculer $((\varphi_t)_* Y)_{(x; y)}$ et établir:
 - $(\varphi_t)_* Y = \frac{d}{ds} (\varphi_t \circ \psi_s \circ \varphi_{-t})_{(x; y)}_{s=0}$
 - $[X, Y] = -\frac{d}{dt} ((\varphi_t)_* Y)_{t=0}$
- Calculer φ_*X, ψ_*Y et $\zeta_*[X, Y]$ et établir

$$(\zeta_t)_*[X, Y]_{t=0} = [(\varphi_t)_*X, (\psi_t)_*Y]_{t=0}$$

8. Soit $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. M munie de la structure différentielle naturelle id_M est une variété différentielle de dimension 2

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, la première projection

(a) Montrer que $X(x, y) = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \frac{\partial}{\partial y}$ est un champ C^∞ sur M

(b) Donner la matrice associée à f_* relativement aux bases $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ et $\{\frac{d}{dt}\}$ de $\chi(M)$ et $\chi(\mathbb{R})$ respectivement. En déduire $(f_*)_q(X_q)$ où $q = (1, 0)$

(c) Vérifier que si $p, p' \in M$ tel que $f(p) = f(p')$ et $p \neq p'$ alors $(f_{*p})(X_p) \neq (f_{*p'})(X_{p'})$

9. On considère dans \mathbb{R}^3 le champs $X = 2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + 3\frac{\partial}{\partial z}$ Soit l'application:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \rightarrow (r, \theta, z)$$

Exprimer X en coordonnées cylindriques, c'est à dire calculer f_*X

10. Soit

$$\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x, y) \rightarrow (x + t, y)$$

(a) Montrer que θ est un groupe à un paramètre

(b) Trouver $X \in \chi(\mathbb{R}^2)$ dont le flot est $\theta_{(x,y)}(t)$

11. (a) Déterminer le sous ensemble de \mathbb{R}^2 où les formes différentielles

$$\alpha = xdx + ydy, \quad \beta = ydx + xdy$$

sont libres

(b) Trouver la base duale $\{X, Y\}$ de $\{\alpha, \beta\}$

(c) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(u, v, w) = (u - v \cos w, \sin u \sin v)$. Trouver $f^*\alpha$, $f^*\beta$ puis $f^*\alpha_{(0,0,0)}$

(d) Trouver $\omega = \alpha \wedge \beta$ et puis calculer $i_X\omega$ où $X = 2xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}$

12. On donne dans \mathbb{R}^2 les champs de vecteurs suivants

$$\begin{cases} X_1(x, y) &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} \\ X_2(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} + \sin x \frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

Déterminer les flots respectifs de X_1 et X_2 , $\varphi_{X_1}(t)$ et $\varphi_{X_2}(t)$ qui passent respectivement par les points $(1, 1)$ et $(0, 0)$

13. On appelle rotation d'angle t autour de oz une transformation

$$F_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longrightarrow (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$$

telle que

$$\begin{cases} X &= x \cos t + y \sin t \\ Y &= -x \sin t + y \cos t \\ Z &= z \end{cases}$$

Soit $V(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$ un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3

(a) Donner le système différentiel qui définit le flot de V . En déduire que ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x''(t) &= -x(t) \\ y''(t) &= -y(t) \\ z'(t) &= 0 \end{cases}$$

(b) Déduire que F_t définit le flot de V à l'instant t

14. On dit qu'une forme de Pfaff $\omega \in \wedge^1 M$ est exacte si ω peut s'écrire sous la forme: $\omega = df$ où $f \in C^1(M)$. la forme ω est dite fermée si $d\omega = 0$. Il est clair que toute forme exacte est fermée.

(a) Montrer que:

1. Si $\alpha, \beta \in \wedge^1 M$ et sont fermées alors $\alpha \wedge \beta$ l'est aussi
2. Si de plus β est exacte alors $\alpha \wedge \beta$ est exacte
3. Déterminer laquelle parmi les formes sur \mathbb{R}^3 suivantes est exacte et laquelle est fermée:
 1. $\omega = xdx + x^2y^2dy + yzdz$
 2. $\Omega = 2xy^2dx \wedge dy + zdy \wedge dz$

(b) On donne la forme différentielle sur \mathbb{R}^3 suivante:

$$\alpha = zdx + xdy + ydz$$

et soit le difféomorphisme

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longrightarrow (ve^u, \sin u \cos v, v - u)$$

Calculer $\Psi^*(\alpha)$ au point $(u, v) = (0, 0)$
