

1. On considère le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$ ,  $S^1$ . On admet que  $A = \{(U_i, \varphi_i); i = 1 \dots 4\}$  avec

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1; x > 0\} \quad \varphi_1(x, y) = y$$

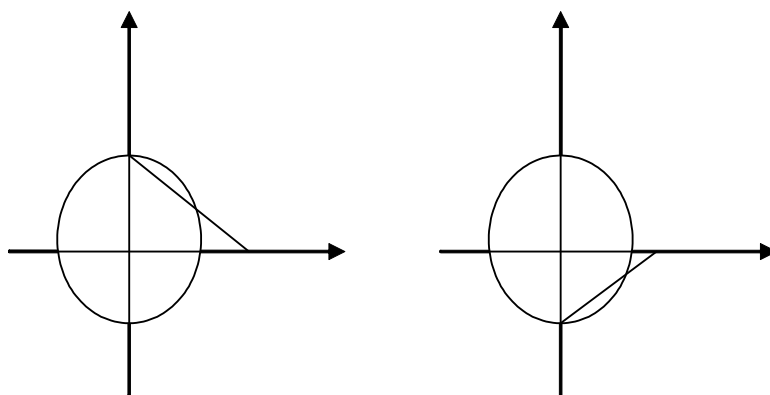
$$U_2 = \{(x, y) \in S^1; y > 0\} \quad \varphi_2(x, y) = x$$

$$U_3 = \{(x, y) \in S^1; x < 0\} \quad \varphi_3(x, y) = y$$

$$U_4 = \{(x, y) \in S^1; y < 0\} \quad \varphi_4(x, y) = x$$

est un atlas sur  $S^1$

On considère l'ensemble  $A' = \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$  avec  $U_N = \{(x, y) \in S^1; y \neq 1\}$  et  $U_S = \{(x, y) \in S^1; y \neq -1\}$ ,  $\varphi_N$  et  $\varphi_S$  sont les projections stéréographiques depuis le pôle nord et le pôle sud de  $S^1$  respectivement:



- (a) Vérifier (en utilisant le théorème de Thalès) que  $\varphi_N(x, y) = \frac{x}{1-y}$  pour tout  $(x, y) \in U_1$  et  $\varphi_S(x, y) = \frac{x}{1+y}$  pour tout  $(x, y) \in U_2$
- (b) Montrer que  $A'$  est un  $C^\infty$  atlas sur  $S^1$
- (c) Montrer que  $A$  et  $A'$  sont équivalents. (Contentez vous de démontrer par exemple que  $(U_2, \varphi_2)$  et  $(U_N, \varphi_N)$  sont équivalentes)

2. Soit

$$U = \{(\sin 2\pi s; \cos 2\pi s) \in S^1, s \in ]0; 1[ \}$$

$$V = \{(\sin 2\pi s; \cos 2\pi s) \in S^1, s \in ]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[ \}$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & U & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\sin 2\pi s; \cos 2\pi s) & \longrightarrow s \end{array}; \quad \begin{array}{ccc} \psi : & V & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\sin 2\pi s; \cos 2\pi s) & \longrightarrow s \end{array}$$

- (a) Montrer que  $A = \{(U, \varphi); (V, \psi)\}$  est un  $C^\infty$ -atlas de  $S^1$
- (b) On rappelle que  $A_1 = \{(U_i, \varphi_i); i = 1 \dots 4\}$  avec

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1; x > 0\} \quad \varphi_1(x, y) = y$$

$$U_2 = \{(x, y) \in S^1; y > 0\} \quad \varphi_2(x, y) = x$$

$$U_3 = \{(x, y) \in S^1; x < 0\} \quad \varphi_3(x, y) = y$$

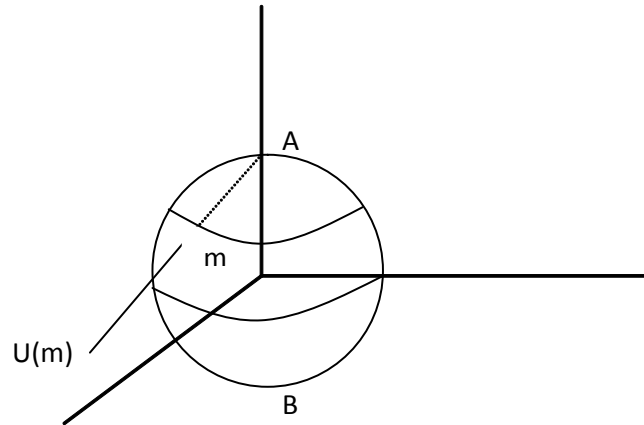
$$U_4 = \{(x, y) \in S^1; y < 0\} \quad \varphi_4(x, y) = x$$

est un atlas sur  $S^1$ . Vérifier que  $A$  et  $A_1$  sont équivalents (contentez vous de vérifier cela avec  $(U_2; \varphi_2)$ ).

3. Soit  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ .  $A = (0, 0, 1)$  et  $B = (0, 0, -1)$  sont les pôles nord et sud de  $S^2$ . On considère l'application

$$u : U = S^2 \setminus A \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

qui à tout point  $m = (x, y, z) \in S^2 \setminus A$  fait correspondre le point  $u(m) = (u_1, u_2)$  d'intersection du plan  $oxy$  avec la droite  $Am$



- (a) Trouver l'équation paramétrique de la droite  $Am$ , en déduire que  $u_1 = \frac{x}{1-z}$ ;  $u_2 = \frac{y}{1-z}$
- (b) De même, on considère l'application  $v : V = S^2 \setminus B \longrightarrow \mathbb{R}^2$  qui à tout point  $m' = (x, y, z) \in S^2 \setminus B$  fait correspondre l'intersection  $v(m') = (v_1, v_2)$  de la droite  $Bm'$  avec le plan  $oxy$ . Exprimer  $v_1, v_2$  en fonction de  $x, y, z$ .
- (c) Dans cette partie on voudrait montrer que  $\Omega = \{(u, U), (v, V)\}$  est un  $C^\infty$  atlas sur  $S^2$  :
1. Vérifier que  $\{U, V\}$  est recouvrement de  $S^2$
  2. Montrer que  $u$  est un difféomorphisme de  $U$

$$u : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (u_1, u_2)$$

(Ind: Vérifier que  $u_1^2 + u_2^2 = \frac{1+z}{1-z}$ , en déduire une expression de  $u^{-1}$ , conclure alors que  $u$  est bijective et que c'est un difféomorphisme)

3. Vérifier que le changement de cartes

$$v \circ u^{-1} : u(U \cap V) \longrightarrow v(U \cap V)$$

est un difféomorphisme.

(Ind: Prenez  $(u_1, u_2, 0) \in u(U \cap V)$  et calculer  $v \circ u^{-1}(u_1, u_2, 0)$  ensuite conclure)

- (d) On rappelle que  $S^2 = f^{-1}(0)$  où  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Soit  $m_0(x_0, y_0, z_0) \in S^2$  on a

$$T_{m_0}S^2 = \ker D_{m_0}f = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid (D_{m_0}f)(X, Y, Z) = 0\} = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\nabla f)_{m_0} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0\}$$

Montrer que le champ sur  $\mathbb{R}^3$  :  $Z = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + 0 \frac{\partial}{\partial z}$  est tangent à  $S^2$ .

- (e) Sachant que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_2} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u_2} \end{cases}$$

Trouver  $u_*(Z)$  dans les coordonnées  $(u_1, u_2)$

- (f) Exprimer  $\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}$  en fonction de  $v_1, v_2, \frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}$  et déduire de e)  $v_*(Z)$  dans les coordonnées  $(v_1, v_2)$