USJ Faculté des Sciences **Géométrie différentielle** **Prof J.SAAB**

Td -1-

---

1. Montrer que l'appliction C^∞ donnée par

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \rightarrow & (t^2, t^3) \end{array}$$

n'est pas une immersion

---

2. Soit $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 < 1\}$. On définit l'application C^∞

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightarrow & (\dfrac{y}{1-x^2-y^2}, e^{x^2}) \end{array}$$

(a) Déterminer l'ensemble S de points M tel que f est une immersion

(b) Montrer que $f(S)$ est un ouvert

---

3. Montrer que la sphère S^n est une sous variété fermée de $\mathbb{R}^{n+1}$

---

4. Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & (\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2 + z^2 \end{array}$$

Trouver les valeurs de a telles que $f^{-1}(\{a\})$ est une sous variété régulière de $\mathbb{R}^3$

---

5. Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} j: &]0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \rightarrow & (\sin t, \frac{1}{2}\sin 2t) \end{array}$$

(a) Montrer que j est une immersion mais qu'elle n'est pas un plongement, en déduire que $\operatorname{Im} j$ n'est pas une sous variété de $\mathbb{R}^2$

(b) Trouver une application f, C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\operatorname{Im} j = f^{-1}(\{0\})$ mais que f n'est pas une submersion. En déduire que j ne peut pas être un homéomorphisme de $]0, 2\pi[$ dans $\operatorname{Im} j$

---

6. Les sous ensembles suivants sont-ils des sous variétés:

(a) la surface cubique $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$

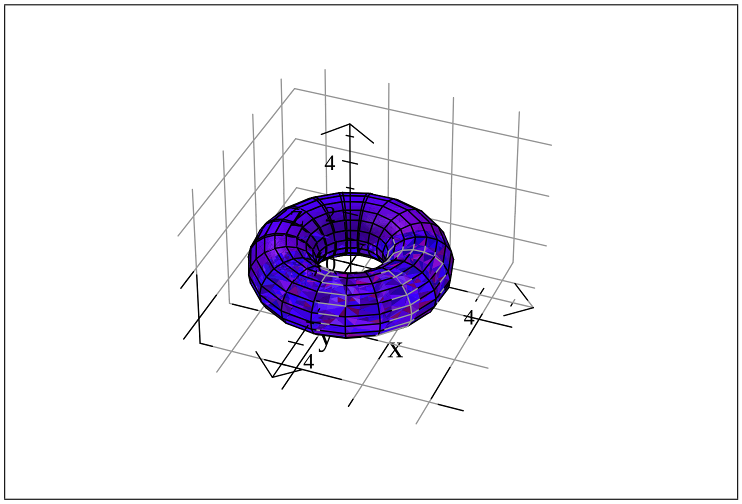
(b) la fenêtre de Vivani $V = \{(x,y,z) \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{et } x^2 + y^2 - x = 0\}$

---

7. Montrer que le tore de révolution obtenu par la rotation du cercle $(y-2)^2 + z^2 = 1$ du plan yoz autour de l'axe oz est donné par la paramétrisation:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\theta, \varphi) & \rightarrow & ((2 + cos\theta)\cos\varphi, (2+\cos\theta)\sin\varphi, \sin\theta) \end{array}$$

en déduire qu'il s'agit d'une sous vartiété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2



---

8. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$

   (a) Montrer que $C = f^{-1}(\{0\})$ est une sous variété de $\mathbb{R}^3$

   (b) Montrer que le vecteur
   $$v = (a, b, c)_{(0,1,1)}$$
   est tangent à (C) si et seulement si $b = 0$

---

9. Soit
   $$\begin{array}{llll} j : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \rightarrow & (x(t) = t, y(t) = t^2 + 1) \end{array}$$
   et soit $M = \operatorname{Im} j$

   (a) Vérifier que M est une sous variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$

   (b) Soit l'application
   $$\begin{array}{llll} \psi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \rightarrow & (x' = x, y' = y - x^2) \end{array}$$

      1. Vérifier que ψ définit un changement de variable et déterminer la sous variéte $M' = \psi(M)$
      2. Soit $p = (a, b) \in M$. Déterminer l'application tangente en p, $\psi_*|_p : T_pM \longrightarrow T_{\psi(p)}M'$. Expliciter l'image de $v = (2, 0)$ au point $p = (0, 1)$
